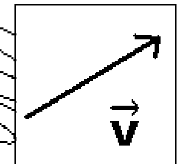
MOVIMIENTOS EN EL PLANO

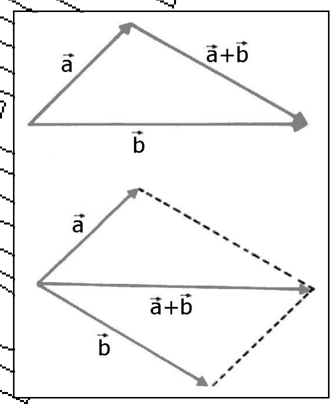
1- VECTORES

Las medidas de magnitudes vectoriales son los vectores. Un vector se representa gráficamente por una flecha que va desde el punto llamado origen al extremo. La longitud del vector es su módulo. La recta a la que pertenece nos da su dirección y la punta de flecha indica el sentido.



Un vector se simboliza por una letra con una flecha encima $\vec{v}$. Su módulo puede indicarse con la misma letra sin flecha, v, o mediante $|\vec{v}|$.

Suma de vectores



La suma de dos vectores es otro vector. Se determina situando el origen de uno de ellos sobre el extremo del otro; el vector suma tiene el origen en el origen del primero y su extremo en el extremo del segundo.

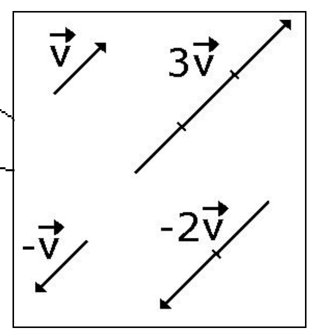
Consecuencia de ello es la regla del paralelogramo: colocando los vectores a sumar con el mismo origen, la diagonal del paralelogramo que definen que pasa por el origen es el vector suma.

La suma de vectores tiene las propiedades conmutativa y asociativa:

a) Conmutativa: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

b) Asociativa: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

Producto de un escalar por un vector



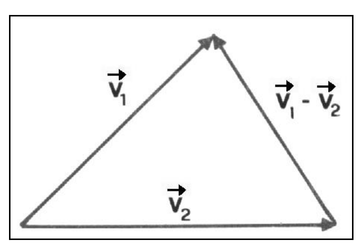
El producto de un escalar k por un vector $\vec{v}$ es otro vector de módulo kv, la misma dirección que $\vec{v}$, igual sentido que $\vec{v}$ si k es positivo y contrario si es negativo.

El vector $-\vec{v}$, opuesto de v, es (-1) $\vec{v}$, de igual módulo y dirección que $\vec{v}$ y sentido contrario.

Diferencia de vectores

La diferencia entre dos vectores $\vec{v}_1-\vec{v}_2$ es la suma de $\vec{v}_1$ y el opuesto de $\vec{v}_2$.

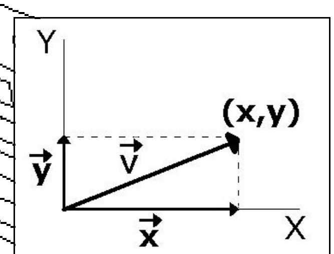
$\vec{v}_1-\vec{v}_2=\vec{v}_1+(-\vec{v}_2)$



De forma gráfica, se puede calcular utilizando la regla del paralelogramo: el vector diferencia es el que va del extremo del segundo al extremo del primero.

Vectores unitarios

Tienen por módulo 1. Son muy importantes los vectores unitarios en las direcciones de los ejes X e Y, denominados $\vec{i}$ y $\vec{j}$, respectivamente



Componentes de un vector

Sea un vector $\vec{v}$ de módulo v que forma un ángulo   con el eje X, colocado de modo que su origen coincide con el origen de coordenadas y las coordenadas de su extremo son (x,y). Puedes observar que dicho vector puede obtenerse como suma de dos vectores perpendiculares colocados a lo largo de los ejes de coordenadas ($\vec{x}$ e $\vec{y}$).

$\vec{v} = \vec{x} + \vec{y}$

Como: $\vec{x} = x \cdot \vec{i}$ $\vec{y} = y \cdot \vec{j}$

Resulta: $\vec{v} = \vec{x} + \vec{y} = x\vec{i} + y\vec{j}$

x e y se denominan componentes del vector $\vec{v}$.

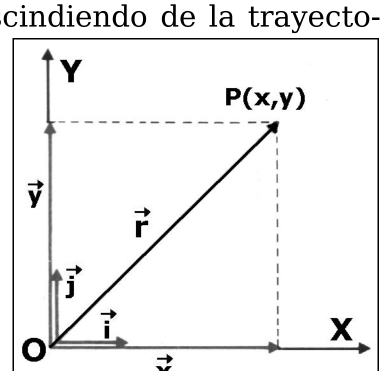
En la figura puedes observar que:

$\cos\alpha = \frac{x}{v}$ $\quad$ $\text{sen}\alpha = \frac{y}{v}$ $\quad$ $\text{tg}\alpha = \frac{y}{x}$

2- VECTOR DE POSICI˘N Y VECTOR DESPLAZAMIENTO

Vimos que en el movimiento rectilíneo la posición de un móvil se determina tomando un punto origen sobre la trayectoria. Entonces la posición se indica mediante la distancia al origen, una magnitud escalar que es positiva o negativa seg˙n el móvil se halle en la zona considerada positiva o negativa.

øCómo se puede determinar la posición en un plano prescindiendo de la trayectoria? Un modo sencillo es utilizar vectores, segmentos orientados con un origen y un extremo, que se caracterizan por su módulo (longitud), dirección y sentido.

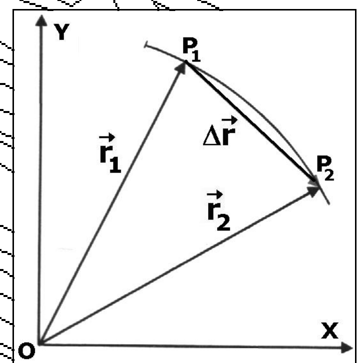


Para ello en un plano tomamos un sistema de coordenadas cartesianas y seÒalamos la posición del móvil mediante un vector con origen en el origen de coordenadas y extremo en el punto móvil (figura). Éste se denomina vector de posición. Cuando las coordenadas del punto son (x,y), el vector de posición se expresa como:

$$\vec{r} = \vec{x} + \vec{y} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

donde $\vec{i}$ y $\vec{j}$ son los vectores unitarios en las direcciones de los ejes.

Cuando el punto se mueve, el vector de posición cambia. A cada valor del tiempo corresponde una posición distinta del punto y un vector de posición que varía con el tiempo, de modo que las coordenadas x e y son funciones del tiempo t.



El cambio de posición se expresa mediante la variación del vector de posición. Si el punto ha pasado de P_1 a P_2

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Este vector P_1P_2, con origen en el punto de partida y extremo en el de llegada, se llama vector desplazamiento (figura).

Observa que el vector desplazamiento no ha de coincidir con la trayectoria recorrida. Sólo en un movimiento rectilíneo el vector desplazamiento tiene la dirección de la trayectoria.

3- VECTOR VELOCIDAD

El vector velocidad media es el cociente entre el vector desplazamiento y el intervalo de tiempo transcurrido:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

El vector velocidad media en un tiempo infinitamente pequeÒo es el vector velocidad instantánea, derivada del vector de posición respecto al tiempo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

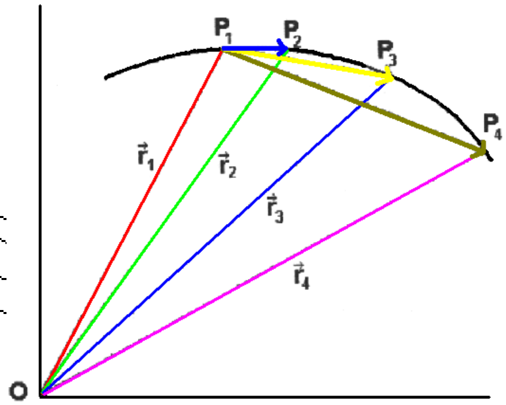
Como los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$ son constantes, al derivar el vector de posición:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

obtenemos:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$

Las componentes del vector velocidad son las derivadas de las coordenadas del punto con respecto al tiempo, esto es:



$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt}$$

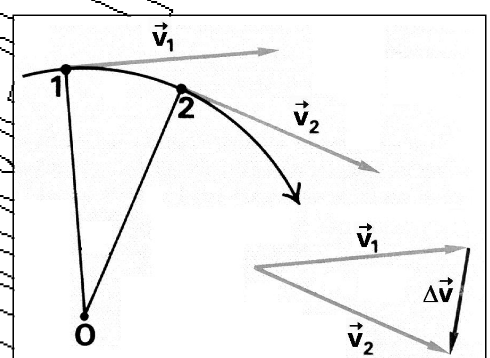
El vector velocidad en cada punto tiene la dirección de la tangente a la trayectoria en ese punto, como puede observarse en la figura. Hacer que t tienda a 0 supone que el punto P_2 se acerque al P_1 indefinidamente. Entonces la dirección de la secante a la curva P_1P_2, tiende a confundirse con la de la tangente:

4- VECTOR ACELERACI”N

4.1- Aceleración media e instantánea

Durante el movimiento la velocidad puede variar en dirección, sentido y módulo, puesto que se trata de una magnitud vectorial. Relacionando la variación del vector velocidad con el tiempo, se tendrá el vector aceleración.

Vector aceleración media es el cociente entre el incremento del vector velocidad y el tiempo. Si es $\vec{v}_1$ la velocidad del móvil para t_1 y $\vec{v}_2$ la velocidad para t_2.



$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Observa que $\Delta\vec{v}$ no es la diferencia entre los módulos de la velocidad en esos instantes, sino la diferencia entre los vectores velocidad.

El vector aceleración instantánea es la aceleración media calculada en un tiempo infinitamente pequeÒo, esto es la derivada del vector velocidad respecto al tiempo.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$$

4.2- Componentes intrínsecos de la aceleración

øCuál es la dirección del vector aceleración? La velocidad es tangente a la trayectoria en cada punto, pero la aceleración presenta una situación algo más compleja.

Un cuerpo que se desplaza en línea recta no tiene aceleración si el módulo de su velocidad es constante, ya que el vector velocidad permanece constante y $\Delta\vec{v} = 0$.

Si el cuerpo que se desplaza en línea recta varía el módulo de su velocidad, la variación de velocidad $\Delta\vec{v}$ tiene la dirección de la trayectoria, y, por tanto, la aceleración, tambiÈn. Estos dos primeros casos son sencillos y poco sorprendentes.

Si un cuerpo tiene trayectoria curva y el módulo de su velocidad es constante (p. ej. un movimiento circular uniforme) puede parecer a primera vista que no hay aceleración, pues no varía el valor de la velocidad. Sin embargo, Èsta es un vector que en este caso cambia continuamente de dirección. Por ello $\Delta\vec{v}$ no es cero y existe aceleración. Esta aceleración, denominada normal o centrípeta, es perpendicular a la trayectoria y, por tanto, al vector velocidad; por ejemplo, en un movimiento circular va dirigida hacia el centro de la circunferencia. Su módulo es:

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

donde v es la velocidad y R es radio de la circunferencia (o el denominado radio de curvatura si es otra curva). Por tanto, en cualquier movimiento curvilíneo hay aceleración. La existencia de la aceleración normal es responsable de que nos vayamos hacia afuera en una curva cuando viajamos en un coche o de que al centrifugar una lavadora, la ropa se vaya hacia la parte exterior del tambor

Si un cuerpo recorre una trayectoria curva variando el módulo de su velocidad, como sucede en un movimiento circular uniformemente acelerado, existe:

una aceleración que hace variar el módulo de la velocidad, tangente a la trayectoria (igual que en el movimiento rectilíneo); se denomina aceleración tangencial; en el movimiento circular se denomina aceleración lineal y se relaciona con la aceleración angular mediante la expresión:

$$a_t = \alpha R$$

siendo la aceleración angular y R el radio de la circunferencia

una aceleración que provoca el cambio de dirección, la aceleración normal, de módulo v^2/R y dirección perpendicular a la trayectoria.

En este caso, la aceleración total es la suma vectorial de las aceleraciones tangencial y normal. Como Èstas son perpendiculares, el módulo de la aceleración total puede calcularse aplicando el teorema de Pitágoras:

$$a_{total} = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Estos dos vectores aceleración tangencial y normal se denominan componentes intrínsecas de la aceleración, que en resumen tienen las siguientes características:

a) aceleración tangencial, que modifica el módulo de la velocidad y su dirección es tangente a la trayectoria en cada punto; es la aceleración lineal del movimiento circular o la aceleración del movimiento rectilíneo;

b) aceleración normal o centrípeta, de módulo v^2/R y dirección perpendicular a la trayectoria, que modifica la dirección de la velocidad; se dirige hacia el centro de la circunferencia en los movimientos circulares.

5- COMPOSICI”N DE MOVIMIENTOS

Veremos a continuación algunos movimientos en el plano que pueden considerarse compuestos por dos movimientos a lo largo de los ejes de coordenadas. Vimos anteriormente que la ecuación de movimiento en dos dimensiones se expresa como:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Derivando se obtiene:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$

Y volviendo a derivar:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$$

A partir de las expresiones anteriores puedes observar que las componentes de la posición, velocidad y aceleración en ambos ejes van por separado y no se mezclan, esto es, conocida x, se determina v_x y a_x independientemente de y, y viceversa.

Supongamos un móvil con un movimiento en el plano con vector de posición:

$$\vec{r} = (5 + 6t)\vec{i} + (4 + 10t - 6t^2)\vec{j}$$

Sus coordenadas en cada momento son:

$X = 5+6t \qquad y=4+10t-6t^2$

A partir de Èstas podemos determinar v_x, v_y, a_x y a_y:

$x= 5+6t \qquad v_x=6$ m/s $\qquad a_x=0$ $\quad y=4+10t-6t^2$

$v_y=10-12t \qquad a_y=-12$ m/s^2

La coordenada X se comporta como la correspondiente a un movimiento rectilíneo con velocidad constante de 6 m/s y coordenada inicial x_0=5 m. Por su parte, la coordenada Y se comporta como la de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado con aceleración -12 m/s^2, velocidad inicial 10 m/s y coordenada inicial y_0=4 m.

Esto es, el movimiento plano anterior puede considerarse compuesto por dos movimientos rectilíneos perpendiculares, uno uniforme en el eje X y otro uniformemente acelerado en el eje Y. En general, los movimientos en el plano que estudiaremos los descompondremos en dos movimientos sencillos en cada uno de los ejes.

5.1- Composición de movimientos rectilíneos uniformes perpendiculares.

Supongamos una barca con la que un remero pretende cruzar un río perpendicularmente a la orilla. La barca es desviada por la corriente del río de modo que si el rumbo es perpendicular a la corriente, la barca no llega a la orilla opuesta frente al punto de partida, sino que la corriente la arrastra aguas abajo una cierta distancia.

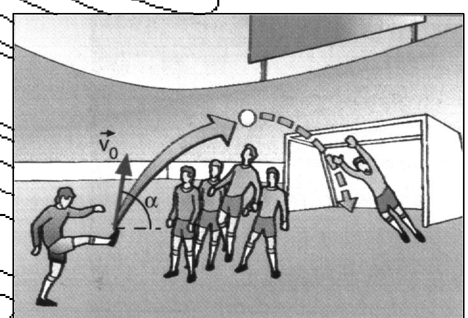
Supongamos que el agua del río lleva una velocidad v_r constante. Si el remero dejase parada la barca, Èsta avanzaría aguas abajo a la misma velocidad del río v_r. Si remase un estanque, donde el agua no se mueve, con una velocidad v_b constante perpendicular a la orilla, la barca llevaría esta velocidad v_b. Pero cuando la barca se halla en el río está afectada por una velocidad v_r constante en el eje X y otra velocidad constante v_b en eje eje Y. La velocidad total de la barca viene dada por:

$$\vec{v} = v_r \vec{i} + v_b \vec{j}$$

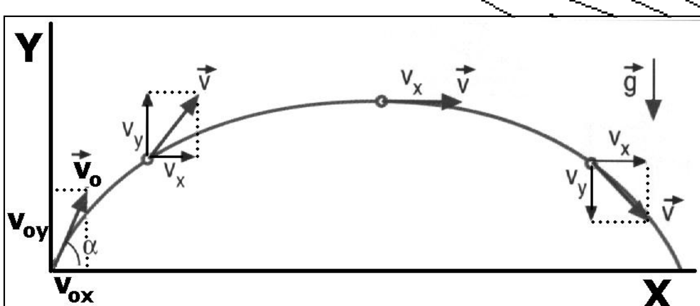
Por ser el movimiento en cada eje uniforme, si consideramos que la barca parte del punto (0,0), las coordenadas del movimiento de la barca son:

$$x = v_r \cdot t \qquad y = v_b \cdot t$$

5.2- Movimiento parabólico



El movimiento de un balón lanzado por encima de la barrera al saque de una falta o el de una piedra lanzada desde un acantilado hacia el mar con velocidad inicial horizontal son movimientos cuya trayectoria es una parábola. Este tipo de movimiento puede considerarse compuesto por un movimiento uniforme horizontal y un movimiento uniformemente acelerado vertical, cuya aceleración es la de la gravedad.



Si la velocidad inicial $\vec{v}_0$ forma un ángulo con la horizontal, sus componentes en los ejes horizontal y vertical son:

$v_{ox} = v_o \cdot \cos$ $v_{oy} = v_o \cdot \mathrm{sen}$ La velocidad horizontal v_x no se modifica a lo largo de la trayectoria parabólica, como se ve en la gráfica. Sin embargo, v_y disminuye hasta ser cero en el punto más alto para despuEs volverse negativa durante el descenso. La ecuación de movimiento en cada uno de los ejes puede escribirse como: $x = x_o + v_{ox} t$

$y = y_o + v_{oy} t - \frac{1}{2} g t^2$ Sustituyendo v_{ox} y v_{ox} en función de v_o y resulta:

$x = x_o + v_o \cdot t \cdot \cos$ $y = y_o + v_o \cdot t \cdot \text{sen} - \frac{1}{2} g t^2$ Por su parte, las componentes de la velocidad vienen dadas por: $v_x = v_{ox} = v_o \cdot \cos$ $v_y = v_{oy} - g \cdot t = v_o \cdot \text{sen} - g \cdot t$

El módulo de la velocidad en cada punto se calcula (teorema de Pitágoras, observa el gráfico anterior) seg˙n:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Y el ángulo que forma en cada instante la velocidad con el eje X se calcula como:

$$tg\alpha = \frac{v_y}{v_x}$$