TEMA II: CINEMÁTICA I

1- LA MECÁNICA

La Mecánica es la parte de la física que estudia el movimiento de los cuerpos. Puede subdividirse en dos bloques:

✸ **Cinemática:** trata el movimiento sin ocuparse de las causas que lo producen.

✸ **Dinámica**, que estudia las relaciones entre el movimiento y las causas que lo producen, las fuerzas. Una parte de la Dinámica estudia las condiciones de equilibrio de los cuerpos es la Estática.

2- CINEMÁTICA. EL MOVIMIENTO

Un cuerpo está en **movimiento** si cambia de posición. La **Cinemática** trata de relacionar el cambio de posición con el tiempo.

Para estudiar el movimiento de un cuerpo hay que determinar su posición respecto a un **sistema de referencia**, que normalmente consiste en:

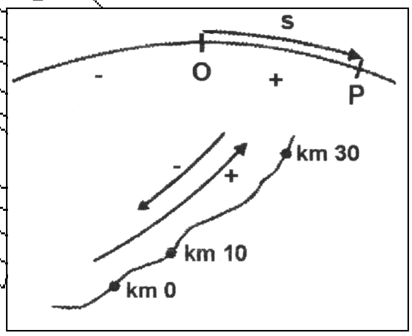
- ✸ un origen
- ✸ unos ejes de coordenadas
- ✸ un reloj (o un conjunto de relojes sincronizados)

Si la posición cambia con el tiempo, el cuerpo se mueve; si no cambia, está en reposo. Lo normal es utilizar sistemas de referencia cómodos para la resolución de cada problema concreto, como veremos posteriormente.

Estudiaremos en este curso el movimiento del **punto material**, porción de materia de dimensiones muy pequeñas en el fenómeno que se estudia. Así, el estudio del movimiento de la Tierra alrededor del Sol puede hacerse considerando la Tierra como un punto. Pero el estudio del movimiento de la Tierra en torno a su eje exige considerarla como un conjunto de puntos. De igual forma, si se quiere saber el tiempo que necesita un avión para ir de París a Tokio no se necesita saber la forma o el tamaño o el movimiento del avión y puede tratarse como un punto material. Sin embargo, un ingeniero aeronáutico no puede despreciar la forma y dimensiones del avión al estudiar el despegue, el aterrizaje o la resistencia del aire, y no puede considerarlo punto material. Debemos concluir, pues, que aunque no existen puntos materiales, en muchos problemas se usan con éxito y que un mismo cuerpo puede considerarse punto material en un caso y en otro caso no ser posible.

La línea que describe un punto móvil se llama **trayectoria**. Por ejemplo, al prender un palito y hacerlo girar con rapidez en el aire en una habitación a oscuras, veremos la trayectoria del extremo encendido del palito.

3- POSICIÓN. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO



El estudio del movimiento requiere conocer en cada instante la posición móvil, el punto donde se halla en cada instante. Para indicar con precisión la posición se suele tomar sobre la trayectoria un punto O como origen y uno de los dos sentidos como positivo, de modo que el otro es negativo.

La posición indica dónde está el móvil, pero no dice nada sobre la distancia recorrida en su movimiento. En la vida corriente se utiliza también esta magnitud. Si una persona tiene, por ejemplo, una avería en el automóvil, llama por teléfono al taller diciendo que se halla en el punto kilométrico 30,4 de determinada carretera. Únicamente afirma que el punto en el que se halla dista 30,4 km del origen de esa carretera, del km 0, pero no dice nada sobre la longitud del viaje.

Cuando la trayectoria es recta, se suele hacer coincidir con uno de los ejes de coordenadas, generalmente X para el movimiento horizontal e Y para el vertical. En estos casos lo normal es utilizar el convenio habitual en geometría de tomar el eje X positivo hacia la derecha y el eje Y positivo hacia arriba. Usando este convenio, un punto situado sobre el eje X 5 m a la derecha del origen tiene una posición x=5 m y otro situado 10 m a la izquierda del origen, una posición x=-10 m, negativa. Sobre el eje vertical Y, un punto que se halle 3 m por encima del origen tiene por posición y=3 m y otro que se halle 4 m por debajo, y=-4 m.

Si la trayectoria no es una recta (por ejemplo una carretera) la distancia del origen al punto móvil, medida sobre la trayectoria, determina su posición s, que no es una coordenada desde el punto de vista matemático, pero se puede utilizar de modo similar a x o y en muchas ocasiones, como veremos.

Cuando el punto se mueve, su posición cambia, y a cada valor del tiempo corresponde un valor de la posición, lo que matemáticamente se indica diciendo que la posición es una función del tiempo.

Por ejemplo, en matemáticas decimos que, dada la expresión $y = x^2 - 1$, y es una **función** de la **variable** x; para cada valor de la variable x, la función y toma un valor. En este caso, para x=-2, y=3 y para x=6, y=35.

En Cinemática la variable que utilizamos habitualmente es el tiempo t y la función es la posición (s, x o y), esto es, para cada valor de t, la posición toma un determinado valor. La función que expresa esta relación entre posición y tiempo se llama **ecuación de movimiento**.

Por ejemplo, para un punto que se desplaza con velocidad constante la ecuación de movimiento puede ser:

$s = 4 + 2t$

Dando valores a la variable t obtenemos los correspondientes valores de la posición: para t=0, s=4m, para t=3 s, s=10 m, etc.

Para un punto que está acelerando en un movimiento sobre el eje X, la ecuación podría ser:

$x = 10t + t^2$

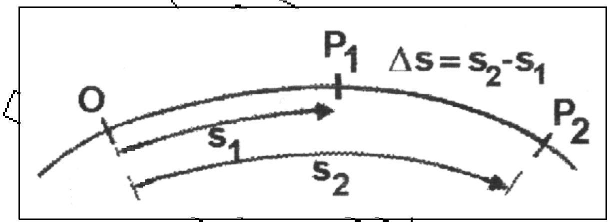
O para un objeto que se lanza verticalmente hacia arriba:

$$y = 15 + 30t - 4{,}9t^2.$$

4- DESPLAZAMIENTO

Llamamos desplazamiento del móvil Δs, Δx o Δy entre dos instantes t_1 y t_2 al cambio de posición en ese intervalo de tiempo, esto es:

$$\Delta s = s_2 - s_1$$



La letra griega Δ se llama delta y en lenguaje matemático significa incremento o variación de una magnitud, esto es, la variación del valor de una magnitud entre dos instantes determinados.

El desplazamiento no coincide siempre con la distancia recorrida. Si un móvil inicialmente estaba en el kilómetro 10 y ahora está en el kilómetro 30, el desplazamiento es:

$$\Delta s = 30 - 10 = 20 \text{ km.}$$

Cuando el móvil se desplaza siempre en el mismo sentido, el desplazamiento coincide con la distancia recorrida, pero no es así si ha cambiado el sentido del movimiento. Si ha ido hasta el km 80 y luego ha vuelto al 30, el desplazamiento sigue siendo 20 km y, sin embargo, la distancia recorrida es:

$$(80 - 10) + (80 - 30) = 120 \text{ km}$$

5- VELOCIDAD

5.1- VELOCIDAD MEDIA

La velocidad media se define como el cociente entre el desplazamiento Δs y el intervalo de tiempo transcurrido Δt. Si en el instante t_1 la posición es s_1 y en el instante t_2 la posición es s_2, resulta:

$$\boxed{v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}}$$

La velocidad indica la rapidez del movimiento. Puede ser positiva, si el móvil se desplaza en sentido positivo ($\Delta s>0$), o negativa, si sucede lo contrario ($\Delta s<0$).

5.2- VELOCIDAD INSTANTÁNEA

Si la velocidad media se calcula en un intervalo de tiempo grande, nos informa poco sobre las características del movimiento en ese intervalo. Saber que la velocidad media de un automóvil en un recorrido de 300 km ha sido 75 km/h no dice nada sobre lo que ha sucedido en el movimiento a lo largo de las cuatro horas de duración. En particular no sabemos, por ejemplo, si al cabo de una hora la velocidad del coche era 60 km/h, 80, 100 o estaba parado.

Para describir mejor el movimiento se debe calcular la velocidad media en intervalos de tiempo pequeños. Si hacemos el intervalo de tiempo tan pequeño como un instante (¿cómo de pequeño es un instante?) la velocidad media se denomina velocidad instantánea. Podemos decir, en primera aproximación, que es la que marca en cada momento el cuenta-kilómetros del coche. Si alguna vez has ido en bicicleta con un cuenta-kilómetros habrás visto que éstos, entre sus funciones, presentan la velocidad instantánea, la que el ciclista lleva en cada momento, que varía continuamente y la velocidad media, que se refiere al trayecto global.

Pongamos como ejemplo la caída de un objeto desde 80 m de altura. Experimentalmente, después de analizar las fotografías realizadas al cuerpo cada décima de segundo y comenzando a contar el tiempo cuando se suelta el objeto, llegamos a la conclusión de que si colocamos el origen de coordenadas en el suelo, la ecuación de movimiento del objeto resulta: $y = 80 - 4{,}9t^2$ (S.I.)

Podemos preguntarnos, por ejemplo, qué velocidad tenía el móvil para t=2 s. Para ello calculamos la velocidad media entre los instantes 2 s y 3,5 s:

$t=2$ s, $y = 80-4{,}9\cdot 2^2=60{,}4$ m $\qquad$ $t=3{,}5$ s, $y = 80-4{,}9\cdot 3{,}5^2=19{,}975$ m

$$v_m = \frac{19{,}975 - 60{,}4}{3{,}5 - 2} = -26{,}95 \text{ m/s}$$

Pero esta velocidad media entre 2 y 3,5 s no es la velocidad en cada instante de ese intervalo de tiempo. Para t=2 s el movimiento es más lento y en el instante t=3,5 s es más rápido. A medida que hacemos los intervalos de tiempo para calcular la velocidad media más cortos, como se ve en la tabla siguiente, obtenemos una serie de velocidades medias que se aproximan entre sí cada vez más.

Δ t	y(2)	y	Δ y	$v_m = \Delta y / \Delta t$
1,5 s	60,4 m	y(3,5) = 19,975 m	-40,425 m	-26,95 m/s
1,1 s	60,4 m	y(3,1) = 32,911 m	-27,489 m	-24,99 m/s
0,7 s	60,4 m	y(2,7) = 44,279 m	-16,121 m	-23,03 m/s
0,5 s	60,4 m	y(2,5) = 49,375 m	-11,025 m	-22,05 m/s
0,3 s	60,4 m	y(2,3) = 54,079 m	-6,321 m	-21,07 m/s
0,1 s	60,4 m	y(2,1) = 58,391 m	-2,009 m	-20,09 m/s

Cuanto menor es el intervalo de tiempo que tomamos, más se acerca la velocidad media a la velocidad en el instante t=2 s, así la velocidad instantánea es la velocidad media en el intervalo entre 2 s y (2+ Δ t) s cuando Δ t es muy pequeño, o sea la velocidad media en un instante; en ese intervalo pequeñísimo Δ t se produce una variación de la posición Δ y también muy pequeña; el cociente entre esos dos intervalos $\Delta y / \Delta t$ cuando Δ t es prácticamente cero es la velocidad instantánea. La velocidad también varía con el tiempo; como a cada tiempo le corresponde una velocidad, la velocidad también es una función del tiempo.

Por el método anterior, a partir de la función que relaciona la posición con el tiempo se podría calcular de modo aproximado el valor la velocidad instantánea en cada momento, tomando para Δ t un intervalo de tiempo suficientemente pequeño, pero existe un método matemático que simplifica mucho el cálculo haciendo uso de lo que en matemáticas se denominan derivadas, que permite calcular a partir de la función posición, la función velocidad.

A cada función le corresponde otra función, denominada derivada, que permite obtener, para cada valor de la variable x, el cociente $\Delta y / \Delta x$ cuando Δ x es infinitamente pequeño. Por ejemplo, en el caso de la función $y = x^2 - 1$, la función derivada, que se simboliza $\frac{dy}{dx}$, es $\frac{dy}{dx} = 2x$.

A nosotros, en este punto, lo que nos interesa es calcular velocidades instantáneas a partir de la ecuación de la posición, que puede venir dada habitualmente como "s", "x" o "y".

El cociente $\Delta s/\Delta t$, $\Delta x/\Delta t$ o $\Delta y/\Delta t$ cuando Δt es prácticamente cero es la derivada de la posición (s, x o y) respecto al tiempo ds/dt, dx/dt o dy/dy. Por tanto:

la velocidad instantánea es la derivada de la posición respecto al tiempo

Aplicando unas sencillas reglas de derivación para funciones sencillas podemos determinar la función derivada para ecuaciones de movimiento sencillas. A continuación se indican dos ecuaciones de la posición y las correspondientes funciones velocidades instantáneas.

$$s = 2t^2 - 7 \qquad v = \frac{ds}{dt} = 4t$$

$$x = t^3 + 0{,}5t^2 - 5t + 4 \qquad v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 + t - 5$$

Reglas elementales sobre derivación de funciones:

1) Función constante: Si y=k $\qquad \frac{dy}{dx} = 0$

Esto es, **la derivada de una constante es cero**.

2) Función identidad $\qquad y = x \qquad \frac{dy}{dx} = 1$

La derivada de la función identidad es la unidad.

3) Función cuadrática $\qquad y = x^2 \qquad \frac{dy}{dx} = 2x$

En general **la derivada de la función x^n es nx^{n-1}**

4) **La derivada del producto de un número por una función es igual al número por la derivada de la función**. Por ejemplo:

y = 3x $\qquad$ dy/dx = 3

$y = 5x^2$ $dy/dx = 10x$

$y = x^3/2$ $dy/dx = 3x^2/2$

5) **La derivada de la suma de funciones es la suma de las derivadas de cada una de ellas**:

$y = x^3 - 2x^2 + x/2 - 1$ $dy/dx = 3x^2 - 4x + 1/2$

Aplicando las reglas de derivación previas podemos calcular la función velocidad instantánea correspondiente a cada ecuación de movimiento. El valor de la velocidad instantánea en cada instante t se calcula sustituyendo el valor de t en la función velocidad instantánea.

Por ejemplo, para un móvil cuya ecuación de movimiento sea $s = t^3 - 1$ (S.I.), la función velocidad instantánea es $v = ds/dt = 3t^2$. De ahí puede deducirse, por ejemplo, que para t=1 s, s = 0 m, $v = 3 \cdot 1^2 = 3$ m/s.

6- ACELERACIÓN

La velocidad de un movimiento varía, en general, con el tiempo. Si cae una piedra su velocidad va creciendo a medida que desciende. Si se lanza verticalmente hacia arriba la velocidad disminuye hasta anularse. Por otra parte el cuenta-kilómetros de un coche cambia continuamente su indicación.

Si en el instante t_1 la velocidad es v_1 y en otro momento posterior t_2 la velocidad tiene otro valor v_2, el cambio de velocidad es: $\Delta v = v_2 - v_1$

Se define la aceleración media de un móvil en un intervalo de tiempo como el cociente entre la variación de la velocidad y el tiempo empleado:

$$\boxed{a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}}$$

La aceleración instantánea es la aceleración media en un intervalo infinitamente pequeño, esto es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo.

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt}}$$

El signo de la aceleración indica en qué sentido varía la velocidad:

◆Si un móvil tiene velocidad positiva y aceleración positiva, la velocidad aumenta de módulo en sentido positivo y el móvil acelera.

◆Si un móvil tiene velocidad positiva y aceleración negativa, la velocidad disminuye de módulo en sentido positivo y el móvil frena.

◆Si un móvil tiene velocidad negativa y aceleración positiva, la velocidad disminuye de módulo en sentido negativo y el móvil frena.

◆Si un móvil tiene velocidad negativa y aceleración negativa, la velocidad aumenta de módulo en sentido negativo y el móvil acelera.

En resumen:

Si velocidad y aceleración son del mismo signo, el móvil acelera y si son de distinto signo, el móvil frena.

La elección de un eje en sentido positivo o negativo es arbitraria. Sin embargo, como dijimos previamente, el eje X suele ser positivo hacia la derecha y el Y positivo hacia arriba. En un movimiento vertical de un cuerpo bajo la acción de la gravedad, éste sufre una aceleración hacia abajo, negativa en el eje Y vertical. Cuando el cuerpo sube, su velocidad es positiva y frena a consecuencia de la aceleración negativa. Cuando baja, acelera ya que velocidad y aceleración son negativas.

7- MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO

Supongamos un móvil cuya ecuación de movimiento venga dada por una ecuación del tipo $\mathbf{s = At^2 + Bt + C}$

siendo A, B y C constantes. La ecuación de la velocidad en función del tiempo para este movimiento es: $\mathbf{v = ds/dt = 2At + B}$

y la aceleración: $\mathbf{a = dv/dt = 2A}$

esto es, la aceleración es constante. Así pues, un movimiento cuya ecuación corresponda a una función cuadrática (de segundo grado) del tiempo tiene aceleración constante (movimiento uniformemente acelerado). Despejando a de la ecuación de la aceleración se obtiene: **A = 1/2 a**

Haciendo t=0 en la ecuación de la velocidad y llamando v_0 a la velocidad inicial (v para t=0) se obtiene: **B = v_0**

Finalmente, haciendo t=0 en la ecuación de movimiento y llamando s_0 a la posición inicial llegamos a: **C = s_0**

Sustituyendo los valores de estas constantes en las ecuaciones previas obtenemos las ecuaciones del movimiento y la velocidad para el movimiento uniformemente acelerado:

$$s = s_0 + v_0 t + 1/2\, at^2 \qquad v = v_0 + at$$

Otra ecuación muy usada que se puede deducir a partir de estas dos últimas es:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta s$$

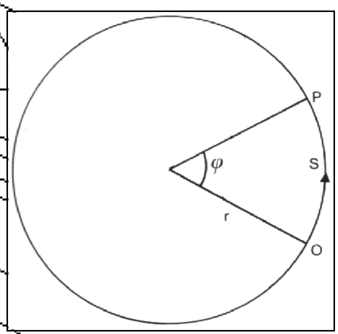
8- MOVIMIENTO UNIFORME

Se llama movimiento uniforme al que tiene velocidad constante y, por tanto, aceleración cero. Puede considerarse un caso particular del movimiento uniformemente acelerado con a=0. En este caso, pues, la ecuación de movimiento toma la forma:

$$s = s_0 + vt$$

9- MOVIMIENTO CIRCULAR

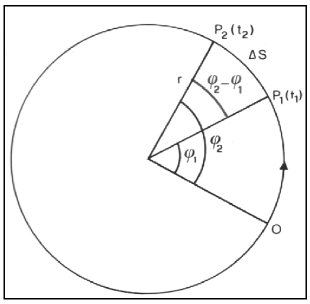
Tiene por trayectoria una circunferencia. Se puede indicar la posición s del punto móvil tomando un punto origen en la trayectoria circular. Así la posición es la distancia al origen sobre la trayectoria, con su signo correspondiente.



Otro modo de indicar la posición usa el ángulo que forma el radio del punto móvil en cada instante con el radio del punto tomado como origen. Es la posición angular φ (fi).

Como unidad de ángulos se usa el radián, ángulo al que corresponde un arco de circunferencia de longitud igual al radio. Como la longitud de la circunferencia es **l = 2π r**, el arco que abarca toda la circunferencia contiene 2π veces el radio, esto es una circunferencia contiene 2π radianes, media circunferencia (180º) π radianes, un cuarto de circunferencia (90º) $\pi/2$ radianes, etc.

Cuando el punto se mueve, el ángulo varía. A cada valor del tiempo, corresponde un valor del ángulo, esto es: el ángulo φ (posición angular) es una función del tiempo (t es la variable y φ la función).



Si en los instantes t_1 y t_2 el móvil se halla en P_1 y P_2, formando ángulos φ_1 y φ_2 con el origen, respectivamente, el cambio de posición viene dado por el desplazamiento angular $\Delta\varphi$:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

10- VELOCIDAD Y ACELERACIÓN ANGULAR

Velocidad angular media es el cociente entre el desplazamiento angular (ángulo girado) y el tiempo transcurrido:

$$\boxed{\omega_m = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}}$$

La **velocidad angular instantánea** es la derivada del ángulo respecto al tiempo:

$$\boxed{\omega = \frac{d\varphi}{dt}}$$

La velocidad angular ω puede variar durante el movimiento. Si para t_1 la velocidad angular es ω_1 y para t_2 es ω_2, la variación de la velocidad angular es: $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$

Se define la **aceleración angular media** α_m como el cociente entre la variación de la velocidad angular y el tiempo transcurrido. Por su parte, la **aceleración angular instantánea** es la derivada de la velocidad angular con respecto al tiempo.

$$\boxed{\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}} \qquad \boxed{\alpha_m = \frac{d\omega}{dt}}$$

Las unidades de ω y α son, respectivamente, rad/s y rad/s^2.

11- RELACIÓN MAGNITUDES LINEALES - ANGULARES

Como los ángulos se miden en radianes, la longitud del arco correspondiente a un radián es el radio de la circunferencia r, a dos radianes 2r, a medio radián r/2, etc, y en general a un ángulo φ le corresponde una longitud $\varphi \cdot r$, esto es:

$$s = r \cdot \varphi$$

Esta relación entre una magnitud angular y su correspondiente magnitud lineal es general: la lineal es igual a la angular por el radio, como se indica en la siguiente tabla:

Magnitud	Lineal	Angular	Relación
Posición	s	φ	$s = r \cdot \varphi$
Velocidad	v	ω	$v = r \cdot \omega$
Aceleración	a	α	$a = r \cdot \alpha$

12-MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE ACELERADO

Supongamos un móvil que describe una circunferencia cuya ecuación de movimiento venga dada por una ecuación del tipo **$\varphi = At^2 + Bt + C$**

con A, B y C constantes. La ecuación de la velocidad angular en función del tiempo para este movimiento es: **$\omega = d\varphi/dt = 2At + B$**

y la aceleración angular: **$\alpha = d\omega/dt = 2A$**

esto es, la aceleración angular es constante y el movimiento circular es uniformemente acelerado. Despejando a de la ecuación de la aceleración se obtiene:

$$A = 1/2\,\alpha$$

Haciendo $\omega = 0$ en la ecuación de la velocidad angular y llamando ω_0 a la velocidad angular inicial (ω para t=0) se obtiene: **$B = \omega_0$**

Finalmente, haciendo t=0 en la ecuación de movimiento y llamando φ_0 a la posición angular inicial llegamos a: **$C = \varphi_0$**

Sustituyendo A, B y C en las ecuaciones previas obtenemos las ecuaciones del movimiento y la velocidad para el movimiento circular uniformemente acelerado:

$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + 1/2\,\alpha t^2$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$

A partir de estas dos últimas se puede deducir: $\omega - \omega_0^2 = 2\alpha\,\Delta\varphi$

13- MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

Tiene velocidad angular constante y, por tanto, aceleración angular nula. Es un caso particular de m.c.u.a. con $\alpha = 0$. La ecuación de movimiento toma la forma:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega \cdot t$$

El movimiento circular uniforme es un movimiento periódico, pues el móvil pasa a intervalos regulares de tiempo por el mismo punto de la circunferencia. El tiempo entre un paso y el siguiente se denomina período (T). Como cada vuelta son 2π radianes y el movimiento es uniforme se cumple que $\omega = 2\pi / T$. Despejando el período obtenemos:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

Se llama frecuencia f al número de vueltas que el punto móvil realiza cada segundo. Si el período es 1 s, el móvil da 1 vuelta/s, si el período es 2 s, el móvil da 1/2 vuelta/s, si es 10 s da 1/10 vuelta/s, etc. Puedes observar que la frecuencia es la inversa del período. Por tanto:

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

La unidad de frecuencia es s^{-1}, que se denomina Hertz o Hertzio.