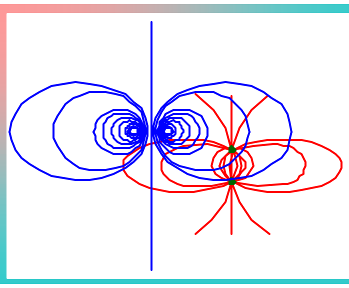
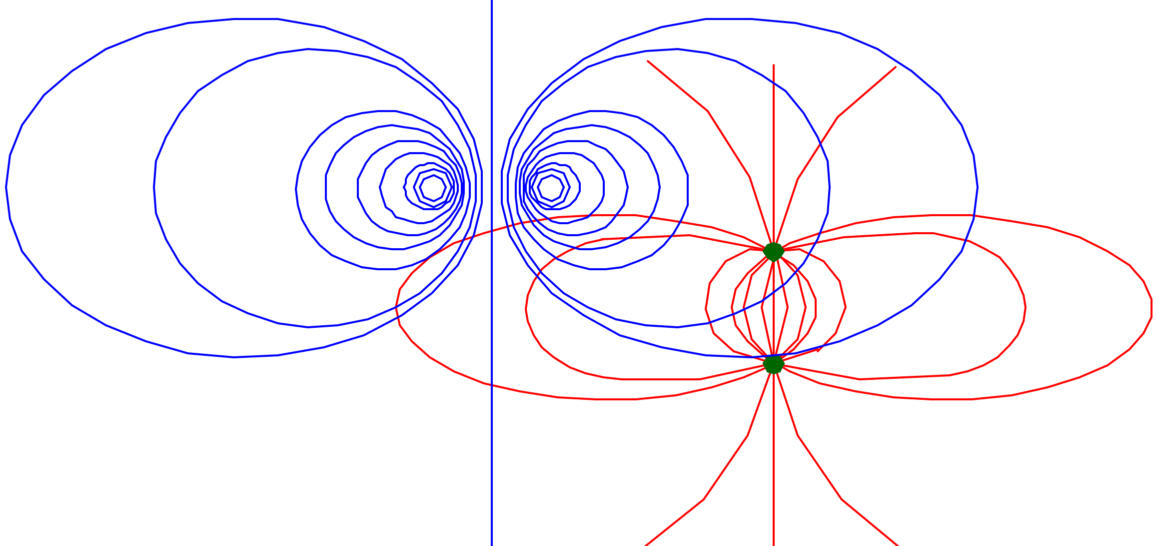
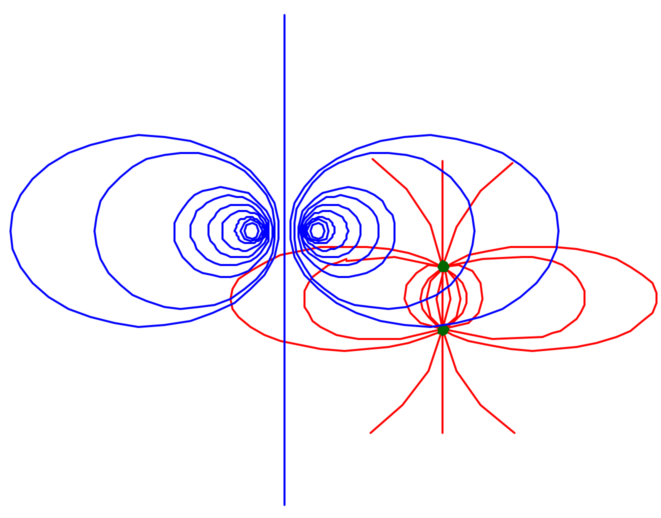


PROBLEMAS RESUELTOS

Ley de Coulomb – Campo Eléctrico
Ley de Gauss- Potencial Eléctrico





Autores: Mg Ing: Carlos Ciliberti - Ing. Carlos J. Suárez - Ing. Susana N. Roldán

1

LEY DE COULOMB
CAMPO ELÉCTRICO

ELECTROSTÁTICA

Ley de Coulomb – Campo Eléctrico

Problemas Resueltos

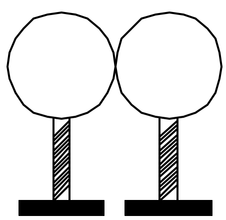
Problema Nº 1.

Una persona al caminar sobre una alfombra (en un día seco) adquiere una carga negativa por fricción de 64 µC, al llegar a la puerta de salida siente una descarga. Podría decir ¿Cuántos electrones pasaron de la alfombra a la persona y de la persona a la puerta? e (carga del electrón) = 1,6 .10^{-19} C

N (Nº de electrones) = $\dfrac{64.10^{-6}\,C}{1{,}6.10^{-19}\,C} = 4.10^{14}$

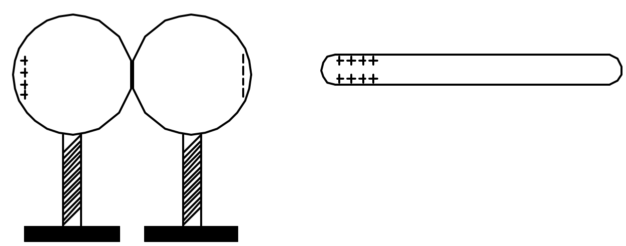
Problema Nº 2.

Dos esferas metálicas montadas sobre soportes aislantes están en contacto. ¿Cómo podrían cargarse eléctricamente sin tocarlas? ¿De que signo será la carga que tendrán? Dispongo de una varilla de plástico que he frotado y se encuentra cargada.

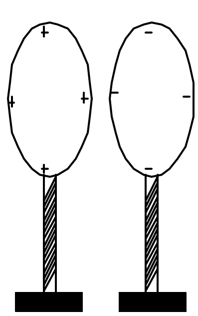


El primer paso es colocar las esferas de modo tal que estén en contacto, tal como se ve en la figura.

El segundo paso será acercar la varilla cargada a las esferas y por inducción se separarán las cargas.



Seguidamente manteniendo la varilla quieta separamos las esferas y posteriormente alejamos la varilla y las cargas se distribuirán uniformemente en cada esfera.



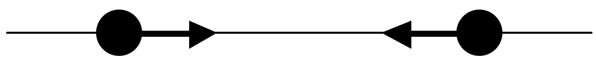
Problema Nº 3.

Una carga punto q_1 = +3.10^{-6} C se coloca a 12 cm de una segunda carga punto q_2 = -1,5.10^{-6} C. Calcular la magnitud dirección y sentido de la fuerza que obra sobre cada carga.

Para calcular la magnitud utilizaremos la ley de Coulomb.

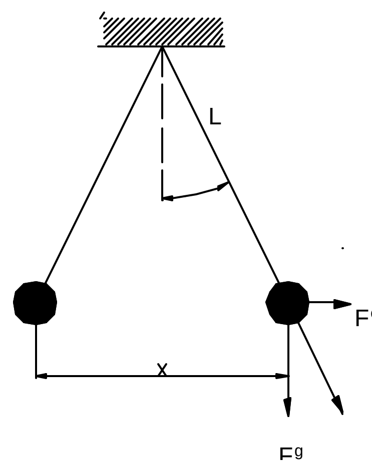
$$F = K\frac{q_1\, q_2}{r^2} = 9.10^9\,\frac{N\,m^2}{C^2}\,\frac{3.10^{-6}\,C\,1{,}5.10^{-6}\,C}{(0{,}12)^2\,m^2} = 2{,}8\,N$$

Como los signos de las cargas son distintos la fuerza será de atracción y la dirección será la recta que une ambas cargas.



Problema Nº 4.

Dos esferas de masa m = 10 g cuelgan de hilos de seda de longitud L = 120 cm., poseen cargas idénticas q y por repulsión están separadas x = 5 cm., tal como se muestra en la figura. Diga cuanto vale q.



$$F_e = K\frac{q\,q}{r^2} \qquad F_g = m\,g$$

$$h = \sqrt{L^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = 1{,}19\,m \qquad tg\,f = \frac{x/2}{h} = 0{,}021$$

$$K = 9.10^9\,\frac{N\,C^2}{m^2} \qquad g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$$

$$tg\,f = \frac{F_e}{F_g} \qquad q = \sqrt{\frac{tg\,f\,m\,g\,r^2}{K}} = 2{,}4.10^{-8}\,C$$

Problema Nº 5.

Una carga se dividirá en dos partes. ¿Cuál será la relación entre ellas, si separadas a cierta distancia dada, se producirá una máxima repulsión coulombiana?

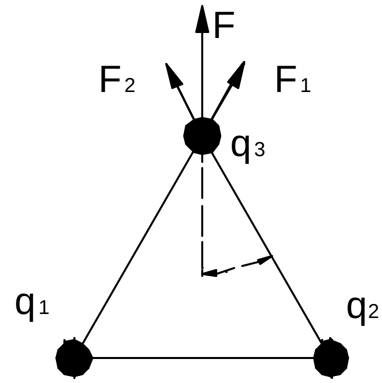
$$F = \frac{q_1\,q_2}{r^2} \qquad q_1 + q_2 = q \qquad q_2 = q - q_1 \qquad F = K\frac{(q-q_1)\,q_1}{r^2}$$

$$\frac{dF}{dq_1} = \frac{K\,q}{r^2} - \frac{K\,2\,q_1}{r^2} = 0 \qquad q = 2\,q_1 \quad \Rightarrow \quad q_1 = \frac{q}{2} \quad \Rightarrow \quad q_1 = q_2 = \frac{q}{2}$$

Problema Nº 6.

Tres carga puntuales se hallan en los vértices de un triángulo equilátero de lado a = 10 cm. Calcular la fuerza resultante sobre la partícula 3.

$q_1 = 2.10^{-6}$ C ; $q_2 = 2.10^{-6}$ C ; $q_3 = 4.10^{-6}$ C



$$F = K\frac{q_1\, q_3}{a^2} = K\frac{q_2\, q_3}{a^2} = 7.20\,N$$

$$F_R = F\ 2\cos q = 12.5\,N$$

Problema Nº 7.

Dos pequeñas esferas de plástico tienen cargas positiva. Cuando están separadas 30 cm la fuerza de repulsión es de F = 0,15 N. diga: a) ¿cuál es la carga de cada esfera? y b) ¿cuál sería la carga de cada una si una de las esferas tiene tres veces la carga de la otra?

$$a)\qquad F = K\frac{q^2}{r^2} \qquad\qquad q = \sqrt{\frac{F\,r^2}{K}} = 1{,}22.10^{-6}\,C$$

$$b)\qquad q_1 = 3q_2 \qquad F = K\frac{q_1\,q_2}{r^2} = K\frac{3q_2^2}{r^2} \qquad q_2 = \sqrt{\frac{F\,r^2}{3K}} = 7{,}0.10^{-7}\,C \qquad q_1 = 2{,}1.10^{-6}\,C$$

Problema Nº 8.

Un objeto pequeño que posee una carga de -4,0 nC experimenta una fuerza hacia abajo de 5,0 10^{-8} N cuando se la coloca en un lugar donde existe campo eléctrico. a) ¿Cuál es la magnitud y dirección del campo eléctrico en ese punto?, b) ¿Cuál sería la magnitud y la dirección de la fuerza que actuaría sobre un protón colocado en ese punto del campo eléctrico? q_p = 1,6 10^{-19} C

$$a)\qquad E = \frac{F}{q} = \frac{5.10^{-8}\,N}{4{,}0.10^{-9}\,C} = 12{,}5\frac{N}{C}$$ Hacia arriba

$$b)\qquad F = E.q_p = 12{,}5\frac{N}{C}1{,}6.10^{-19}\,C = 2{,}0.10^{-18}\,N$$ Hacia arriba

Problema Nº 9.

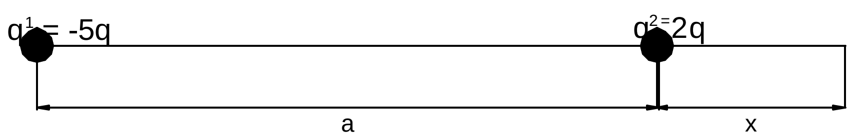
Una carga puntual q_1 = -6,0 nC está en el origen de coordenadas y una segunda carga puntual q_2 = 4,9 nC está sobre el eje x en x = 0,8 m. Encuentre el campo eléctrico en magnitud y dirección en cada uno de los puntos sobre el eje x: a) x = 0,2 m; b) x = 1,2 m y c) x = -0,2 m.

$$a)\, E = K\frac{q}{r^2} \qquad E = E_2 + E_1 = K\left(\frac{q_2}{r_2^2} + \frac{q_1}{r_1^2}\right) = -1{,}47 . 10^3\, \frac{N}{C} \ \text{ sobre el eje x dirigido a la izquierda}$$

$$b)\, E = E_2 - E_1 = 9 . 10^9\, \frac{N\, m^2}{C^2}\left(\frac{4{,}9\, C}{0{,}4^2\, m^2} - \frac{6{,}0\, C}{1{,}2^2\, m^2}\right)10^{-9} = 0{,}238\ 10^3\, \frac{N}{C} \quad \text{sobre el eje x dirigido a la derecha}$$

$$c)\, E = E_1 - E_2 = 9 . 10^9\, \frac{N\, m^2}{C^2}\left(\frac{6{,}0\, C}{0{,}2^2\, m^2} - \frac{4{,}9\, C}{1{,}0^2\, m^2}\right)10^{-9} = 1{,}30 . 10^3\, \frac{N}{C} \qquad \text{idem b)}$$

Problema Nº 10.



Dadas dos cargas colocadas como se indica en la figura indicar los punto donde el campo eléctrico es nulo. a = 50 cm

Veremos los tres casos posibles:

a) A la izquierda de las cargas. No tendremos solución por ser mayor la carga de la izquierda.
b) Entre las cargas. El campo producido por cada carga tiene idéntica dirección.
c) A la derecha en este caso deberemos encontrar a que distancia x ambos campos son idénticos en magnitud y opuestos en sentido.

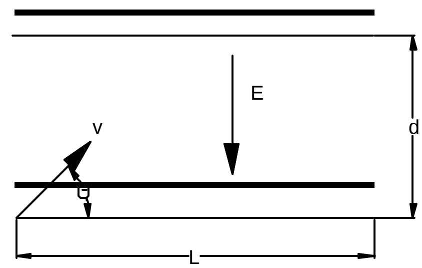
$$E_1 = E_2 \qquad K\frac{q_1}{(a+x)^2} = K\frac{q_2}{x^2} \qquad 3x^2 - 2x - 0{,}5 = 0 \qquad x = 0.86\, m$$

Problema Nº 11.

Se dispara un electrón como muestra la figura entre dos placas con una velocidad v = 6.10^6 m/s y un ángulo È = 45º . El campo eléctrico E = 2.10^3 N/C, la distancia entre las placas es d = 2 cm y la longitud de las mismas l = 10 cm.

Calcule:

a) Si el electrón pega en alguna de las placas y
b) b) En que punto lo hace.



a) Para decir si el electrón llega a pegar en la placa superior veremos si la energía cinética que posee es mayor o menor que el trabajo que hace el campo sobre el.

$$v_y = v_0\, sen q \qquad\qquad v_x = v_0 \cos q$$

$$K = \frac{1}{2} m v_y^2 = F\ y = E\, e\, y \qquad y = \frac{m v_y^2}{2 E e} = 2{,}5\,cm > d \quad el\,electrón\,pegaráen\,la\ placa\,\sup erior$$

$$b)\ t = \frac{x}{v_{0x}} \qquad y = v_{0y}\ t + \frac{1}{2} a t^2 = \frac{v_{0y}\ x}{v_{0x}} + \frac{1 E e x^2}{2 m v_{0x}^2} = d \qquad x = 1{,}7\,cm$$

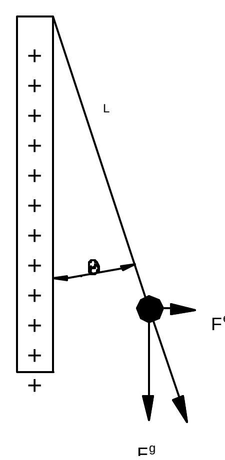
Problema Nº 12.

Una carga q_1 = 16 nC esta en el orígen, una segunda carga desconocida está en x = 3 m y una tercera carga q_3 = 12,0 nC está en x = 7 m. ¿Cuál es la magnitud y signo de la carga desconocida si el campo neto en x = 9 m E = 18 N/C en dirección de x +?

$$E = E_1 + E_2 + E_3 = K\left(\frac{q_1}{r_1^2} + \frac{q}{r^2} + \frac{q_3}{r_3^2}\right) = 18\,\frac{N}{C} \qquad\qquad q = -43{,}0\,nC$$

Problema Nº 13.

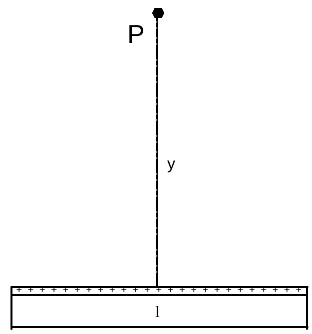
Una pequeña esfera de masa m = 0,6 g tiene una carga q = 3 . 10^{-10} C, pende de un hilo de seda de longitud L = 8,0 cm. El otro extremo del hilo está unido a una gran lámina aislante vertical que posee una densidad superficial de cargas **ó** = 25,0 10^{-6} C/m^2. ¿Cuándo la esfera está en equilibrio que ángulo formará el hilo con la lámina?



$$E = \frac{s}{2 e_0} \qquad tg\, q = \frac{F}{F_g} = \frac{E\, q}{m\, g} = \frac{s\ q}{2 e_0\, m\, g} = 0{,}072 \qquad q = 4{,}12^o$$

Problema Nº 14.

Una varilla no conductora de longitud finita L (m) tiene una carga total Q (c) uniformemente distribuida a lo largo de ella. Calcular el campo eléctrico en un punto P perpendicular a la barra, a una distancia y en el punto medio.



Cada dq genera en el punto N un dE(vector)

$$d\vec{E} = \frac{1}{k}\frac{dq}{r^2}\hat{r} \qquad \text{como} \quad l = \frac{Q}{L} \Rightarrow dq = l.dx$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

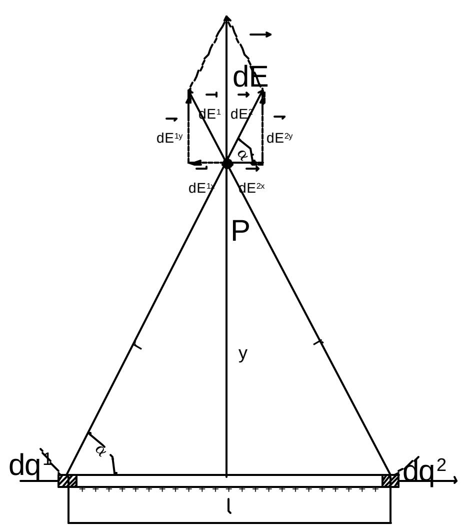
$$sena = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$$

Del análisis de la gráfica se observa que el campo E es:

$$dE = 2dE.sena = 2\frac{1}{k}.\frac{l.dx}{(x^2 + y^2)}.\frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$$

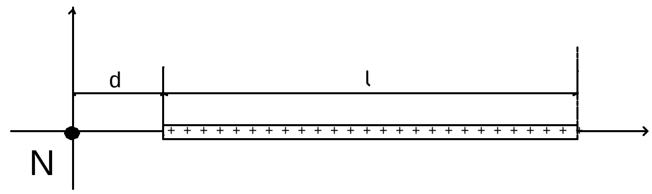
$E = \dfrac{2.l.y}{k}\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$,aplicando los valores a los extremos de integración obtendremos el valor del campo.

$$E = \frac{x}{y^2.\sqrt{(x^2 + y^2)}}$$



Problema Nº 15.

Una barra no conductora de longitud L (m) tiene una carga por unidad de longitud igual ë (C/m) y una carga total Q (C). Calcular el campo eléctrico en un punto N a lo largo del eje de la barra a una distancia d del extremo izquierdo.

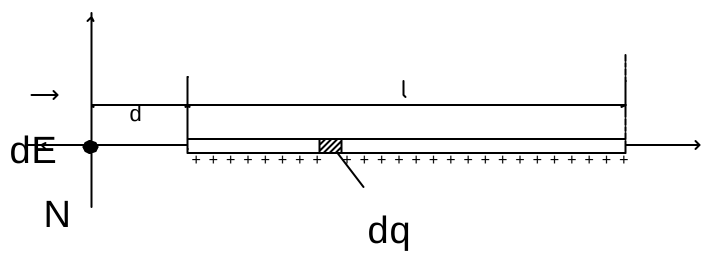


Cada dq genera en el punto N un dE(vector)

$$d\vec{E} = \frac{1}{k}\frac{dq}{r^2}\hat{r} \qquad \text{como } l = \frac{Q}{L} \Rightarrow dq = l.dx$$

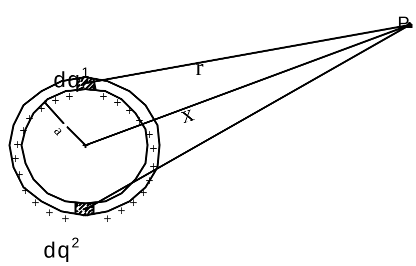
$$E = \int dE = \frac{1}{k}\int \frac{dq}{r^2} = \int_{x=d}^{x=L+d} \frac{l.dx}{x^2} = \frac{l}{k}\left[-\frac{1}{x}\right] = \frac{l}{k}\left[\frac{1}{d} - \frac{1}{(d+L)}\right]$$

$$\boxed{E = \frac{1}{k}\frac{Q}{d.(d+L)}}$$



Problema Nº 16.

Un anillo de radio a (m), tiene una carga positiva uniformemente distribuida, con una carga total Q(C). Calcule el campo eléctrico en un punto p a lo largo del eje "x" a una distancia d del centro del anillo.



Cada dq genera dE en P, pero debido a la simetría de carga el campo resultante es el que se observa.

$$d\vec{E} = \frac{1}{k}\frac{dq}{r^2}.\hat{r}$$

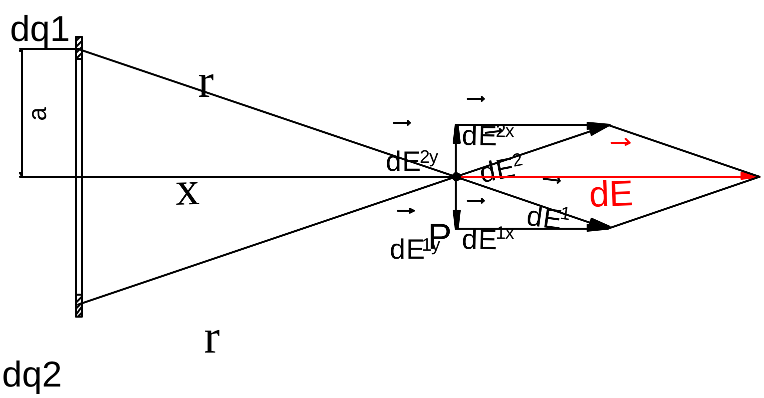
como $l = \frac{Q}{L} \Rightarrow dq = l.ds$

$$dE_x = \frac{1}{k}\frac{dq}{r^2}.\cos f$$

$r = \sqrt{(a^2 + x^2)}$ y $\cos f = \frac{x}{r} =$

$$dE = \frac{1}{k}\frac{l\,ds}{(a^2 + x^2)}\frac{x}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}$$, integrando

$$\boxed{E = \frac{Q.x}{k(a^2 + x^2)^{3/2}}}$$ Que ocurriría en el caso de que “x” sea mucho mayor que “a”



Problema Nº 17.

Un dipolo eléctrico esta formado de dos cargas eléctricas de magnitud q = 1.20 nC separadas una distancia de 22.0 mm. El dipolo se encuentra dentro de un campo eléctrico externo E = 1.50 N/C, si el momento del dipolo forma 30º con la dirección del campo. Determinar:

a) ¿Cuál es el momento que ejerce el campo en el dipolo?

b) ¿Cuál es el trabajo que debe hacer un agente externo para dar al dipolo un ángulo de 30º a partir de una posición inicial colineal con el campo (es decir á = 0º)

a) $T = p \times E$ $\qquad p = 2qa$ (momento del dipolo)

$$T = 2.q.a..E.sena$$

$$T = 2.1{,}20.10^{-6}.2{,}20.10^{-2}.1{,}50.10^{-5}.sen30$$

$$T = 3{,}96.10^{-3}[Nm]$$

b) $$W = \int T.df = \int_{f_i}^{f_f} pEsenf.df = pE\int_{f=0°}^{f=30°} -\cos f.df = pE[-\cos 30 + \cos 0]$$

$$W = 5{,}30.10^{-4}[J]$$

2

LEY DE GAUSS

ELECTROSTÁTICA

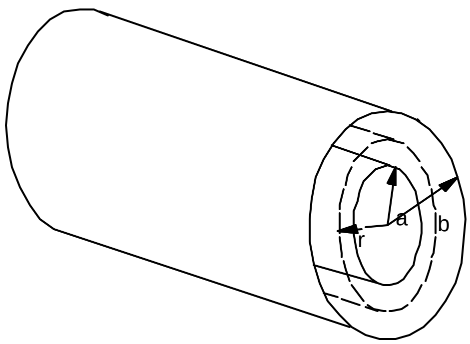
Ley de Gauss

Problemas Resueltos

Problema Nº 18.

Dos largos cilindros concéntricos de radios a = 1cm y b = 3 cm, poseen una carga superficial ó = 6.10^{-6} C/m^2 de signos opuestos. Calcule utilizando Gauss:

a) el campo E para r = 0,5 cm
b) el campo E para r = 2,0 cm y cual es su dirección
c) el campo E para r = 3,5 cm
d) ¿Cuál debe ser la energía cinética de un protón para que pueda girar entre lo dos cilindros en forma estable? ¿Cuál es el signo de las cargas en cada cilindro, donde se encuentran las carga y cual es la dirección y sentido del campo?



a) Si trazo una superficie gaussiana cilíndrica con r < a no encerraré cargas y por lo tanto E=0.

b) En este caso como encierro cargas debo usar Gauss para calcular E

$$\oint \vec{E}\,.\,d\vec{A} = \frac{q}{e_0} \qquad E\,2p\,r\,l = \frac{s\;2p\;a\,l}{e_0} \qquad E = \frac{s\;a}{r\,e_0} = 3{,}39\,.10^5\;\frac{N}{C}$$

c) En este caso trazo una superficie gaussiana cilíndrica de radio r > b y en ella la carga neta encerrada por la misma es nula y por lo tanto E = 0

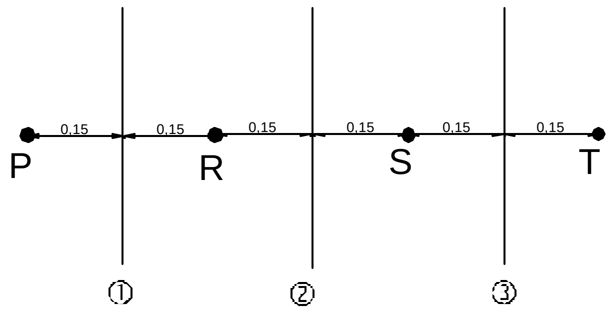
d) $$F_c = F_e \qquad m\frac{v^2}{r} = E\,q_p = \frac{s\;a\,q_p}{r\,e_0} \qquad K = \frac{1}{2}m\,v^2 = \frac{s\;a\,q_p}{e_0} = 5{,}42\,.10^{-6}\;J$$

El cilindro exterior tendrá cargas positivas y se encuentran en la cara interior del mismo. El cilindro interior tendrá cargas negativas y estarán en la cara exterior del mismo. Por lo tanto el campo será radial y apuntará hacia el centro.

Problema Nº 19.

Tres grandes láminas aislantes paralelas tienen densidades de carga superficiales de +ó$_1$=0,02 C/m^2; +ó$_2$=0,01 C/m^2 y -ó$_3$=0,02 C/m^2 . Las láminas adyacentes están a 0,3 m entre si.

Calcule el campo eléctrico neto (magnitud dirección) debido a las tres láminas en los puntos P, R, S y T acorde con la figura.



$$a)\ E_P = -E_1 - E_2 + E_3 = -\frac{s_1}{2e_0} - \frac{s_2}{2e_0} + \frac{s_3}{2e_0} = -5{,}64.10^{-8}\,\frac{N}{C} \quad hacia\,la\ izquierda$$

$$b)\ E_R = E_1 - E_2 + E_3 = \frac{s_1}{2e_0} - \frac{s_2}{2e_0} + \frac{s_3}{2e_0} = 1{,}69.10^{9}\,\frac{N}{C} \quad hacia\,la\ derecha$$

$$c)\ E_S = E_1 + E_2 + E_3 = \frac{s_1}{2e_0} + \frac{s_2}{2e_0} + \frac{s_3}{2e_0} = 2{,}82\,.10^{9}\,\frac{N}{C} \quad hacia\,la\ derecha$$

$$d)\ E_T = E_1 + E_2 - E_3 = \frac{s_1}{2e_o} + \frac{s_2}{2e_o} - \frac{s_3}{2e_o} = 5{,}64\,.10^{8}\,\frac{N}{C} \quad hacia\,la\ derecha$$

Problema Nº 20.

Se tiene un cascaron esférico no conductor con una distribución de cargas no uniforme igual a r = a r (C/m^3). Calcular la expresión del campo eléctrico para los puntos situados:

a) $0 < r < r_1$ b) $r_1 < r < r_2$ c) $r_2 < r$

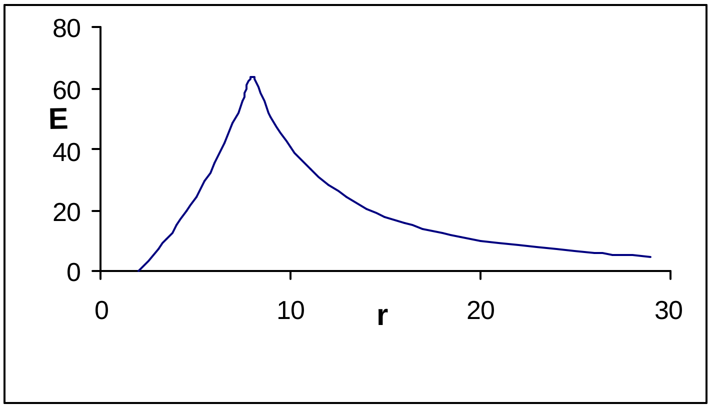
d) realizar una gráfica de E = f(r)

$$a)\ \oint \vec{E}\,.d\vec{A} = \frac{q}{e_0} \qquad E\,.4p\,r^2 = 0 \qquad E = 0$$

$$b)\oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{q}{e_0} \qquad E\,.4p\,r^2 = \frac{\int_{r_1}^{r} r\,.dv}{e_0} = \frac{\int_{r_1}^{r} a\,r\,4p\,r^2\,dr}{e_0} = \frac{p\,a\left(r^4 - r_1^4\right)}{e_0} \qquad E = \frac{a\left(r^4 - r_1^4\right)}{4e_0\,r^2}$$

$c)$ *aplicamos el mismo procedimiento* $\qquad E = \dfrac{a\left(r_2^4 - r_1^4\right)}{4 e_0 r^2}$

d)



Problema Nº 21.

Una carga punto de 1.10^{-6} C se encuentra en el centro de una superficie gaussiana cúbica de 50 cm de arista. ¿Cuál es el flujo de E para dicha superficie?

$$\Phi = \frac{q}{e_0} = \frac{1.10^{-6}\ C}{8{,}85.10^{-12}\ \dfrac{C^2}{N\,m^2}} = 1{,}12.10^5\ \frac{N\,m^2}{C}$$

Problema Nº 22.

En el ejemplo siguiente tengo una esfera no conductora de radio r_1 y posee distribución uniforme de cargas negativas y rodeándola un cascaron esférico conductor de radios r_2 y r_3. La superficie externa del cascaron exterior está conectada a tierra.¿Calcule:

a) E para $0 < r < r_1$
b) E para $r_1 < r < r_2$
c) E para $r_2 < r < r_3$
d) E para $r_3 < r$

$$a)\ \oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{q}{e_0} \qquad E.4p\,r^3 = \frac{r\ \dfrac{4}{3}p\,r^3}{e_0} \qquad E = \frac{r\ r}{3 e_0}$$

$b)\ E.4p\ r^2 = \frac{q}{e_0} \qquad E = \frac{1}{4p\, e_0} \frac{q}{r^2}$

$c)\quad E = 0$

$d)\quad E = 0$

Problema Nº 23.

Un cable coaxial largo consiste en un conductor cilíndrico interior de radio a y un cilindro exterior de radio interior b y radio exterior c. El cilindro exterior está montado sobre soportes aislantes y no tiene carga neta. El cilindro interior tiene una carga positiva uniforme por unidad de longitud ë. Calcule el campo eléctrico E para:

a) a < r < b ;

b) b < r < c

c) c < r

d) dibuje una gráfica de E = f(r) desde r = 0 a r = 2 c

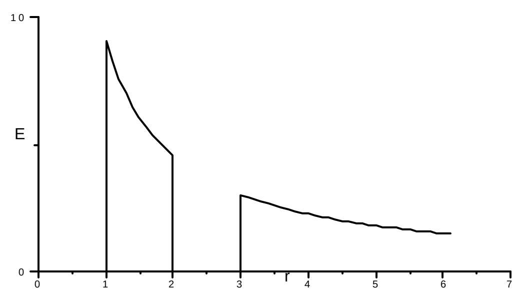
e) encuentre cual es la carga por unidad de longitud para la cara interior y exterior del cilindro externo.

$a)\oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{q}{e_0} \qquad E\,2p\ r\,l = \frac{l\ l}{e_0} \qquad E = \frac{l}{2p\, e_0\, r}$

$b)\ E = 0$

$c)\quad E = \frac{l}{2p\, e_0\, r}$

e) cara exterior + ë Cara interior –ë



3

POTENCIAL ELÉCTRICO

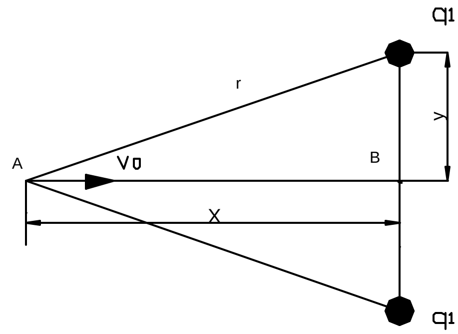
ELECTROSTÁTICA

Potencial Eléctrico

Problemas Resueltos

Problema Nº 24.

Se tienen dos cargas q = 1 .10^{-10} C, ubicadas sobre una recta a una distancia 2y ; (y = 1 cm) entre ellas. Sobre una línea perpendicular a la recta (punto A) se coloca un electrón a una distancia x = 10 cm., con una v_0 = 2.10^{6} m/s dirigido hacia las cargas. ¿Diga con que velocidad llegará a la recta de unión (punto B) si sólo recibe influencia de dichas cargas?



La fuerza de atracción que ejercerá la carga q_1 está dada por la ley de Coulomb

$$F_1 = K\frac{q_1\,e}{r^2} \qquad la\ acción\ total\ es \qquad F = F_1\,2\cos q = K\frac{q_1\,e}{r^2}\,2\cos q$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \cos q = \frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}$$

La velocidad final la calcularemos por la conservación de la energía, teniendo en cuenta que la fuerza que ejercen las cargas q_1 sobre el electrón varían con la distancia x. Por ello debemos calcular el trabajo realizado sobre la partícula realizando un balance de energía.

$$K = K_0 + W \qquad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m v_0^2 + \int_A^B \vec{F}.d\vec{x} \qquad v^2 = v_0^2 + \frac{2}{m}\int_{x_A}^{x_B} F\ dx$$

$$llamemos\ I\ a\ la\ \text{int}\ egral\ y\ operemos\ separadamente$$

$$I = \frac{4\,K\,q_1\,e}{m}\int_0^{0,1}\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}dx \qquad para\ poder\ \text{int}\ egrar\ hago\ \ x^2 = z \quad dz = 2\,x\,dx$$

$$I = \frac{2\,K\,q_1\,e}{m}\int_0^{0,1}\frac{dz}{\left(z+y^2\right)^{3/2}} = -\frac{4\,K\,q_1\,e}{m}\left(\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}\right)_0^{0,1} \qquad quedando\quad finalmente$$

$$v^2 = v_0^2 + \frac{4\,K\,q_1\,e}{m}\left[\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}\right]_{0,1}^{0} = 7{,}54.10^6\ \frac{m}{s}$$

Problema Nº 25.

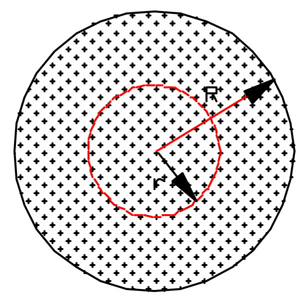
Una lámina no conductora infinita tiene una densidad superficial ó = 1.10^{7} C/m^2. ¿Qué separación tienen dos superficies equipotenciales entre las cuales hay una diferencia de potencial de 5 Volts?

Dado que el campo producido por la lámina cargada en puntos alejados de los bordes es uniforme, podemos:

$$V_B - V_A = \int_A^B \vec{E}.d\vec{l} = E\,.\,d_{AB} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,d_{AB} = 5V \qquad d_{AB} = \frac{5V\,.\,2.\;8{,}83.10^{-12}\;C^2/N-m^2}{1.10^{-7}\;C/m^2} = 0{,}885.10^{-3}\;m$$

Problema Nº 26.

Si una carga q se distribuye uniformemente en un volumen esférico no conductor de radio R, demostrar que el potencial a una distancia a del centro (siendo a < R) está dado por:



$$V = \frac{q\left(3R^2 - a^2\right)}{8\pi\,\varepsilon_0\,R^3}$$

Para ese cálculo utilizaremos la expresión que nos relaciona el potencial con el campo:

$$V_R - V_a = -\int_a^R \vec{E}.\vec{dr} \qquad (1)$$

Pero para poder integrar necesitamos conocer la ley de variación del campo E dentro de la esfera, para ello utilizaremos Gauss.

$$\int \vec{E}\,.\,d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} = E\,4\pi\,r^2 = \frac{\frac{4}{3}\pi\,r^3\,\dfrac{q}{\frac{4}{3}\pi\,R^3}}{\varepsilon_0} \qquad\qquad E = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{q\;r}{R^3}$$

Reemplazando E en (1)

$$V_R - V_a = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\,R^3}\int_a^R r\,dr = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0\;R^3}\left[a^2 - R^2\right] \qquad (2)$$

V_R podemos calcularla y reemplazarla en la ecuación (2)

$$V_R = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{q}{R} \qquad V_a = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{q}{R} - \frac{q}{8\pi\,\varepsilon_0\,R^3}\left[a^2 - R^2\right] = \frac{q}{8\pi\,\varepsilon_0\,R^3}\left[2R^2 - a^2 + R^2\right]$$

$$V_R = \frac{q\left[3R^2 - a^2\right]}{8\pi\,\varepsilon_0\,R^3}$$

Problema Nº 27.

Se tienen dos esferas metálicas cargadas y separadas entre sí lo suficiente para que la influencia mutua sea despreciable. La esfera A tiene: un radio r_A = 10 cm. y $q_A = 1.10^{-9}$ C, la B tiene r_B = 15 cm. y una $q_B = 1.10^{-10}$ C.

Calcule:

a) El potencial en cada una de las esferas y la d.d.p. entre ellas.

b) Si dichas esferas se conectan entre si por medio de un alambre conductor fino, diga en que sentido circularan las cargas.

c) Diga cuales son los potenciales de A y B luego de haberlas conectado.

d) ¿Cuáles son los valores de E en la superficie de cada una?

a.

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_A}{r_A} = 9.10^9 \frac{N\,m^2}{C^2}\frac{1.10^{-9}\,C}{(0{,}1m)^2} = 900\,V$$

$$V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_B}{r_B} = 9.10^9 \frac{N\,m^2}{C^2}\frac{1.10^{-10}\,C}{(0{,}15\,m)^2} = 40\,V$$

$$V_A - V_B = 860\,V$$

b. Las cargas circularan de A a B porque el potencial de $V_A > V_B$

c. Al conectar con un alambre conductor las cargas se distribuirán hasta que los potenciales se igualen.

$$V'_A = V'_B \qquad \frac{q'_A}{r_A} = \frac{q'_B}{r_B} \qquad como\ la\ carga\ total\quad q = q_A + q_B = 1{,}1.10^{-9}\,C = q'_A + q'_B$$

$$q'_A = 1{,}1.10^{-9}\,C - q'_B \qquad y\ reemplazando\ nos\ queda\ q'_B = \frac{r_B\left(1{,}1.10^{-9}\,C - q'_B\right)}{r_A}$$

$$\frac{q'_B\,r_A}{r_B} = \left(1{,}1.10^{-9}\,C - q'_B\right) \qquad\qquad \frac{q'_B\,r_A}{r_B} + q'_B = 1{,}1.10^{-9}\,C$$

$$q'_B = \frac{1{,}1.10^{-9}\,C}{\frac{r_A}{r_B}+1} = 6{,}6.10^{-10}\,C \qquad\qquad q'_A = 4{,}4.10^{-10}\,C$$

d.

$$E_A = \frac{\sigma_A}{\varepsilon_0} = \frac{q'_A}{4\pi r_A^2\varepsilon_0} = 396\,\frac{V}{m} \qquad\qquad E_B = \frac{\sigma_B}{\varepsilon_0} = \frac{q'_B}{4\pi r_B^2\varepsilon_0} = 263\,\frac{V}{m}$$

Problema Nº 28.

Ahora que conocemos sobre potencial resolveremos el problema Nº 20 de una manera muy sencilla. De acuerdo a la definición de diferencia de potencial, sabemos que el trabajo que realizaré para ir de un punto de potencial V_A a otro de potencial V_B será la energía cinética que obtendrá la partícula cargada.

$$K = K_0 + K_1 \quad \text{donde} \quad K_0 = \frac{1}{2} m\, v_0^2 \quad \text{y} \quad K_1 = (V_B - V_A)e$$

Calculamos: V_A y V_B

$$V_A = 2K\frac{q_1}{r} = 2K\frac{q_1}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}} = 17{,}9V \qquad V_B = 2K\frac{q_1}{y} = 180\,V \qquad V_B - V_A = 162{,}1V$$

$$K = \frac{1}{2}m v_0^2 + (V_B - V_A)e = 2{,}9.10^{-17}\ J = \frac{1}{2}m v^2 \qquad v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = 7{,}8.10^6\ \frac{m}{s}$$

Mg. Ing Carlos Ciliberti
Ing. Carlos J. Suárez
Ing. Susana N. Roldán

Bibliografía:
FÍSICA PARA ESTUDIANTES DE CIENCIAS E INGENIERÍA. Parte II D. Halliday y R. Resnick, 5ª edición 1964. Compañía editorial continental Méjico
FÍSICA. Parte II D. Halliday y R. Resnick, 3ª edición 1982. Compañía editorial continental Méjico
FÍSICA. Tomo II R. A. Serway 4º edición M^c Graw Hill.
FÍSICA. Tomo II D. Tipler, Compañía editorial Reverté.