DINÁMICA

1. LA FUERZA

Como muestra la experiencia, en la naturaleza los cuerpos, de una u otra forma, interaccionan entre sí. Por ejemplo, el zapato presiona sobre el suelo e interacciona con él, la interacción gravitatoria entre la Tierra y la Luna hace que ésta gire alrededor de la primera, la interacción entre la raqueta del tenista y la pelota hace que ésta modifique su movimiento, etc.

La fuerza es una medida de la interacción entre los cuerpos.

El resultado de la interacción entre los cuerpos es su **deformación** (cambio de dimensiones o forma del cuerpo), su **aceleración** (variación del vector velocidad) o ambos efectos a la vez. Por ejemplo, cuando un tenista golpea la pelota con su raqueta, una fotografía del instante del impacto revela que la pelota sufre una deformación importante y simultáneamente una aceleración, pues cambia su velocidad.

Los efectos de las fuerzas dependen de su magnitud y de la dirección y sentido en que se aplican. Por ello **la fuerza es una magnitud vectorial** que representaremos mediante $\vec{F}$. La unidad de fuerza en el S.I. es el **Newton** (N), la fuerza que aplicada a un cuerpo de 1 kg de masa le comunica una aceleración de 1 m/s^2.

La medida de las fuerzas no se hace directamente, sino de modo indirecto a partir de la medida de sus efectos, deformaciones o aceleraciones. Normalmente resulta más fácil medir deformaciones que aceleraciones. Por este motivo, la pieza principal del dinamómetro (instrumento para medir fuerzas), es un muelle cuyo grado de deformación depende del valor de la fuerza que se mide.

Ley de Hooke

Los cuerpos elásticos (un muelle) se deforman cuando se aplica una fuerza sobre ellos y cumplen en general la ley de Hooke que indica que la deformación de un cuerpo elástico es directamente proporcional a la fuerza aplicada. En el caso de un muelle, la deformación proporcional a la fuerza aplicada es el alargamiento Δ l:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{l} = \mathbf{K} \cdot (\mathbf{l} - \mathbf{l}_0)$$

K se denomina constante elástica o constante recuperadora y es característica de cada muelle, l_0 es la longitud natural del muelle y l la longitud que alcanza cuando se le aplica una fuerza F. Los cuerpos elásticos tienen unos límites de elasticidad dentro de los cuales se cumple la ley de Hooke. Si se superan estos límites, el cuerpo no cumple la ley y las deformaciones pueden ser permanentes.

Fuerza resultante

Cuando sobre una partícula o punto material se aplica más de una fuerza, el efecto global de todas ellas es el de una única fuerza igual a la suma vectorial de todas ellas, denominada fuerza resultante.

$$\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 + \vec{\mathbf{F}}_3 + \ldots + \vec{\mathbf{F}}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{F}}_i$$

DINÁMICA. PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

La Dinámica es la parte de la Mecánica que estudia el movimiento en relación con las causas que lo determinan, que son las fuerzas. La Dinámica que estudiamos fue establecida por Newton en el siglo XVII. Se basa en tres principios fundamentales, cuya validez se prueba porque sus consecuencias están de acuerdo con la experiencia.

La Mecánica de Newton no tiene una validez total, pues no explica todos los movimientos que se pueden observar y experimentar. Cuando la velocidad con que se mueve una partícula es próxima a la de la luz ($3 \cdot 10^8$ m/s), hay notables diferencias entre las observaciones y los cálculos hechos con la Dinámica newtoniana. Por eso en el siglo XX, Einstein formuló la Mecánica Relativista que explica los fenómenos mecánicos de una manera más precisa.

Sin embargo, en los movimientos ordinarios, de vehículos, piezas de máquinas, proyectiles, cohetes, naves espaciales o de planetas y satélites, la Mecánica de Newton es un instrumento suficientemente preciso.

Primer principio: Principio de inercia

Si sobre un cuerpo no actúa ninguna fuerza o la resultante de las que actúan es cero, el cuerpo mantendrá su velocidad constante, en módulo, dirección y sentido. Esto es, si el cuerpo está parado continuará parado y si está en movimiento, continuará con movimiento rectilíneo y uniforme.

En la vida cotidiana hay dos clases de fuerzas que actúan de un modo universal: la gravitatoria (peso) y la de rozamiento. Por ello "parece" que el principio no se cumple. Pero, ¿qué sucederá si disminuimos poco a poco estas fuerzas? Al desplazarse por la arena una carretilla se detendrá con rapidez; por un trozo de vidrio su movimiento durará más y todavía más sobre una superficie de hielo, aunque acabará parándose. Si al cambiar la superficie el cuerpo recorre mayor distancia antes de detenerse es a causa de que la fuerza de rozamiento que le hace disminuir la velocidad hasta pararse es cada vez menor. Si la superficie fuese absolutamente lisa y plana y no hubiese rozamiento, el cuerpo nunca se detendría. Este es el caso de un objeto que se desplace por el espacio lejos de cualquier otro cuerpo (planeta, estrella ...) sin sufrir ninguna atracción gravitatoria: su movimiento es rectilíneo y uniforme.

Segundo principio o ley fundamental de la Dinámica

Las fuerzas, al actuar sobre los cuerpos, modifican su velocidad (en módulo, dirección o sentido). Es decir, las fuerzas son causas que producen aceleraciones. ¿Qué relación existe entre la fuerza aplicada y la aceleración producida?

Experimentalmente se observa que para un mismo cuerpo el cociente entre el módulo de la fuerza y el de la aceleración que produce es constante, esto es, si a una fuerza F_1 le corresponde una aceleración a_1, a F_2 corresponde a_2, etc.:

$$\frac{\mathbf{F}_1}{\mathbf{a}_1} = \frac{\mathbf{F}_2}{\mathbf{a}_2} = \frac{\mathbf{F}_3}{\mathbf{a}_3} = \mathbf{...} = \mathbf{m}$$

Dicha constante m se denomina masa inercial (masa) y mide la inercia del cuerpo, esto es, su resistencia a acelerarse: a mayor masa, menor tendencia a acelerarse y viceversa.

Este resultado experimental se formula de forma vectorial como:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Esta ecuación representa la ley fundamental de la Dinámica y es una ecuación vectorial. Si descomponemos los vectores en sus componentes obtenemos:

$$F_x = m \cdot a_x \qquad F_y = m \cdot a_y$$

En la superficie de la Tierra, ésta atrae a todos los cuerpos con una aceleración g= 9,8 m/s^2 dirigida hacia el centro de la Tierra (hacia abajo). Esta fuerza se denomina peso y tiene por módulo: P = m·g

En forma vectorial se expresa en nuestro sistema de referencia habitual:

$$\vec{\mathbf{P}} = -\mathbf{m \cdot g \cdot \vec{j}}$$

Tercer Principio o principio de acción y reacción

Si un cuerpo A ejerce una fuerza (acción) sobre otro B, el segundo ejerce sobre el primero otra fuerza (reacción) igual y de sentido contrario. No existen fuerzas aisladas sino interacciones. Las fuerzas de acción y reacción se ejercen en cuerpos distintos.

El enunciado del tercer principio provoca en ocasiones cierta confusión: podríamos pensar que al ser la acción y la reacción fuerzas iguales y de sentidos opuestos, se anulan mutuamente. Nada más lejos de la realidad: las fuerzas de acción y reacción, al estar aplicadas sobre cuerpos diferentes, no se anulan entre sí.

De este modo, un imán y un trozo de hierro se atraen con fuerzas iguales y de sentidos contrarios, aplicadas una sobre el imán y dirigida hacia el trozo de hierro y otra sobre el trozo de hierro y dirigida hacia el imán.

Si una persona empuja una pared con una fuerza F, la pared ejerce sobre la persona una fuerza igual y de sentido contrario. La pared no se moverá al estar sujeta, pero la persona puede acelerarse por efecto de la fuerza de reacción de la pared si se halla sobre una superficie con poco rozamiento, como el hielo, o bien lleva unos patines.

Un burro que tira de un carro con velocidad constante realiza una fuerza para vencer el rozamiento. El burro realiza una fuerza total F, de la cual transmite al carro una parte de ésta F’ y el carro ejerce sobre el burro una fuerza -F’; el carro se mueve a costa de la fuerza F’ que el burro le suministra y el burro a costa de la fuerza F-F’ que actúa sobre él.

RESOLUCION GENERAL DE LOS PROBLEMAS DE DINÁMICA

Para la resolución de cualquier problema de Dinámica es conveniente seguir los siguientes pasos:

a) Dibujar todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

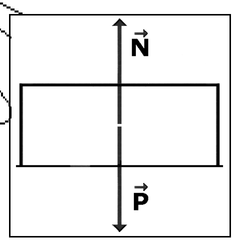
b) Elegir un sistema de coordenadas y determinar las componentes de las fuerzas según esos ejes. Con frecuencia un eje se elige en la dirección del movimiento.

c) Aplicar la ecuación fundamental en cada uno de los ejes considerados.

Cuerpos apoyados en superficies:

Un cuerpo apoyado sobre una superficie ejerce una fuerza sobre ésta a consecuencia del peso. La superficie, para no hundirse, realiza otra fuerza sobre el cuerpo (fuerza de reacción) a fin de que no haya movimiento en la dirección perpendicular. Esta fuerza que la superficie realiza siempre va dirigida hacia afuera y es perpendicular a la misma. Por ello se denomina **fuerza normal**.

Además, en la mayoría de los problemas, que tienen lugar en la superficie de la Tierra, hemos de considerar el **peso**, que actúa sobre todos los cuerpos.

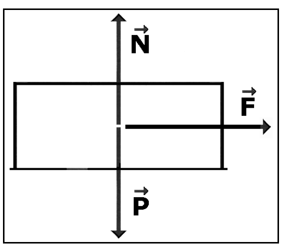


a) Cuerpo de masa m apoyado sobre una superficie horizontal. ¿Qué fuerzas actúan sobre él y cuál es su valor?

Tomando el eje X paralelo a la superficie horizontal, positivo hacia la derecha y el eje Y vertical positivo hacia arriba:

X) No hay fuerzas Y) $N - mg = 0 \Rightarrow N = mg$

En este caso sólo actúan sobre el cuerpo el peso y la reacción normal del plano. Como hemos obtenido, ambas son iguales y de sentido contrario.



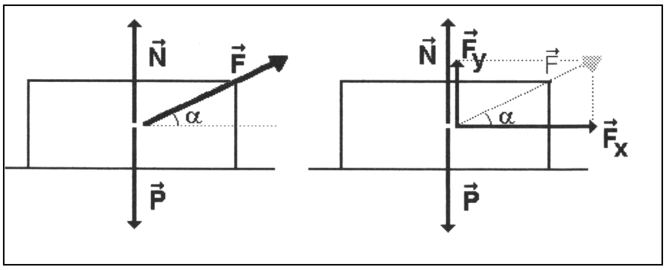
b) Cuerpo de masa m apoyado sobre una superficie horizontal. Sobre él se ejerce una fuerza horizontal F. No hay rozamiento.

Tomamos los ejes como en el caso precedente.

X) F = m·a ⇨ a = F/m

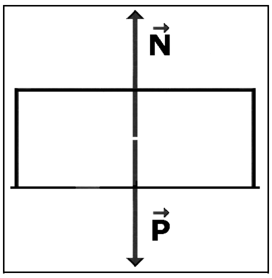
Y) N - mg = 0 ⇨ N = mg

c) Cuerpo de masa m apoyado sobre una superficie horizontal. Sobre él se ejerce una fuerza F que forma un ángulo α con la horizontal. No hay rozamiento.



X) F·cosα = m·a ⇨ ⇨ a= (F/m)·cosα

Y) N + F·senα - mg = 0 ⇨ ⇨ N= mg - F·senα

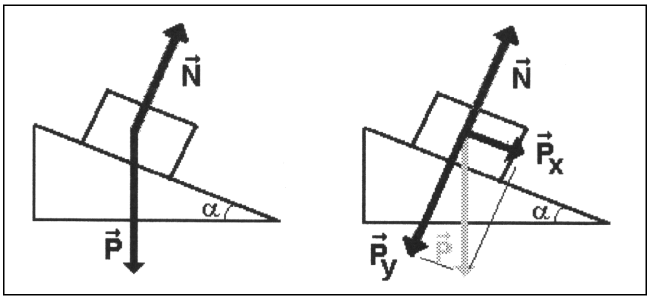


d) Cálculo de la fuerza normal que ejerce el suelo de un ascensor sobre un objeto de masa m apoyado en él cuando el ascensor arranca hacia arriba con aceleración a.

X) No hay fuerzas

Y) N - m·g = m·a ⇨ N = m·(g+a)

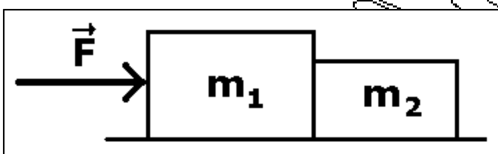
e) Cálculo de la aceleración de un cuerpo colocado en un plano inclinado sin rozamiento y de la fuerza normal del plano



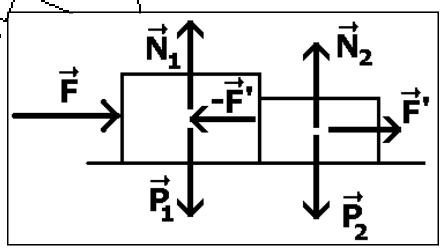
Tomamos el eje X paralelo al plano para que uno de los ejes coincida con la dirección del movimiento:

Eje Y: $N - P_y = 0$ ⇨ $N - m \cdot g \cdot \cos\alpha = 0$ ⇨ $N = m \cdot g \cdot \cos\alpha$

Eje X: $P_x = m \cdot a$ ⇨ $m \cdot g \cdot \mathrm{sen}\alpha = m \cdot a$ ⇨ $a = g \cdot \mathrm{sen}\alpha$



f) Sean dos cuerpos de masas m_1 y m_2 apoyados sobre una superficie horizontal sin rozamiento como indica la figura. Se aplica una fuerza horizontal de módulo F sobre el bloque 1. Determina la fuerza que el bloque 1 ejerce sobre el 2 y la aceleración del sistema.



Las fuerzas $\vec{F'}$ y $-\vec{F'}$ son las interacciones de acción y reacción entre los bloques. Cuando, como en este caso hay más de un cuerpo, hemos de aplicar la segunda ley de Newton a cada uno de ellos por separado; en este caso la aceleración de ambos bloques es la misma, ya que se desplazan juntos. De esta forma:

Bloque 1: Eje X: $F - F' = m_1 a$ Bloque 2: Eje X: $F' = m_2 a$

Eje Y: $N_1 - m_1 g = 0$ Eje Y = $N_2 - m_2 g = 0$

De las ecuaciones para el eje Y se obtienen las fuerzas normales sobre cada bloque:

$N_1 = m_1 g$ $\qquad$ $N_2 = m_2 g = 0$

Sumando las ecuaciones correspondientes al eje X obtendremos el valor de la aceleración y la fuerza de interacción F’:

$F - F' = m_1 \cdot a$

$F' = m_2 \cdot a$

____

$F = (m_1 + m_2) \cdot a$

de donde se deduce que:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} \qquad F' = m_2 a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} F$$

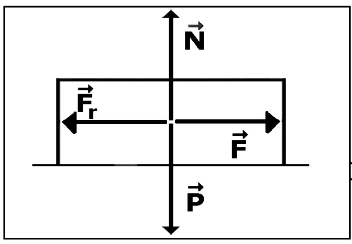
FUERZA DE ROZAMIENTO

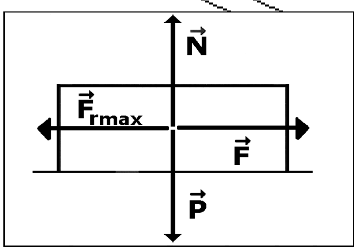
Rozamiento de deslizamiento

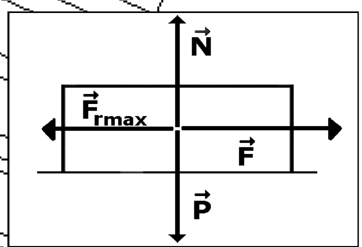
Empuja un bloque sobre una superficie horizontal. Para fuerzas aplicadas pequeñas, no se mueve. A partir de un determinado valor de la fuerza se pone en movimiento. Para mantenerlo en movimiento, a velocidad constante, hay que aplicar una fuerza. Si se deja en libertad, recorre un pequeño espacio y se detiene. Estos hechos parecen estar en contradicción con el principio de la inercia.

La explicación es sencilla si pensamos que las superficies de los sólidos son irregulares. Al poner dos sólidos en contacto las rugosidades de una superficie se encajan en la otra y aquéllos quedan “enganchados”. Por eso al intentar mover uno de ellos aparece una fuerza de rozamiento que se opone al movimiento.

Si aplicamos una fuerza $\vec{F}$ pequeña al bloque en reposo, éste no se mueve ya que se produce una fuerza de rozamiento $\vec{F}_r$ (que se opone al desplazamiento) igual a la fuerza aplicada y de sentido contrario, que la equilibra. Si aumentamos la fuerza $\vec{F}$ el cuerpo sigue sin moverse hasta que para cierto valor de $\vec{F}$ la fuerza de rozamiento ha alcanzado su máximo valor F_{rmax}. A partir de este valor de F la fuerza de rozamiento no puede equilibrar la fuerza aplicada y la diferencia $F-F_{rmax}$ provoca la aceleración del cuerpo. Así pues la fuerza de rozamiento puede tomar valores comprendidos entre cero y su valor máximo, pero nunca provoca por ella misma el movimiento de desplazamiento de superficies, sino que se opone a él.







$F = F_r < F_{rmax}$	$F = F_r = F_{rmax}$	$F > F_r = F_{rmax}$
NO HAY MOVIMIENTO	MOVIMIENTO INMINENTE	MOVIMIENTO ACELERADO

Factores de que depende la Fuerza de rozamiento máxima

Mediante experiencias sencillas se deduce que la fuerza de rozamiento de desplazamiento:

a) es independiente del área de las superficies de contacto.

b) es independiente de la velocidad del movimiento y actúa siempre en sentido contrario a éste.

c) depende de la naturaleza de las superficies que rozan y del estado de pulimento.

d) es proporcional a la fuerza normal con que la superficie sostiene al cuerpo:

$$F \leq \mu \cdot N$$

La constante de proporcionalidad μ que figura en la fórmula anterior se llama coeficiente de rozamiento. Depende de la naturaleza de las superficies que rozan y de su estado.

Cuando en una máquina hay piezas en movimiento que rozan, hay que disminuir el rozamiento. Se logra pulimentando las superficies, añadiendo lubricantes que rellenan las irregularidades de las superficies o poniendo, en los cojinetes, rodamientos a bolas que sustituyen el rozamiento de deslizamiento por rozamiento de rodadura que tiene menor valor. Pero sin rozamiento no podemos andar, ni se “agarran” al suelo las ruedas de nuestros vehículos. Sobre hielo un automóvil “patina”; entonces se añade tierra que aumenta el rozamiento.

Resolución de problemas con fuerza de rozamiento de desplazamiento

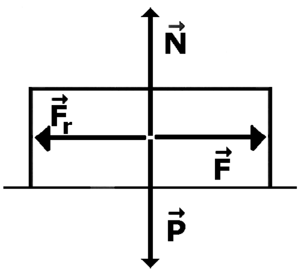
Al resolver este tipo de problemas hemos de tener en cuenta que la fuerza de rozamiento no va **nunca a favor del movimiento relativo de las superficies que rozan**. Por ello:

a) Si el cuerpo situado sobre la superficie con la que roza está en movimiento la fuerza de rozamiento será la máxima ($\mu \cdot N$) y de sentido contrario al movimiento que realiza sobre la superficie.

b) Si el cuerpo está inicialmente en reposo analizaremos hacia dónde se desplazaría si no hubiese rozamiento y supondremos que la fuerza de rozamiento toma el valor máximo en sentido contrario. Si al calcular la aceleración obtenemos un valor para ella del mismo sentido que la fuerza de! rozamiento, lo desecharemos, pues movimiento de desplazamiento de superficies y fuerza de rozamiento no pueden ser del mismo sentido. En este caso el cuerpo no se mueve y el valor de la fuerza de rozamiento es el justo para que el cuerpo permanezca en reposo. Si el resultado para la aceleración es de sentido contrario a la fuerza de rozamiento, ésta toma el valor máximo ($\mu \cdot N$) y el valor obtenido para la aceleración es correcto.

Ejemplos:

1) Bloque de 2 kg en reposo inicialmente sobre una superficie horizontal sobre la que puede deslizar con coeficiente de rozamiento 0,1. Determina su aceleración si se le empuja con una fuerza horizontal de: a) 1 N; b) 1,96 N; c) 2,4 N



X) $F - F_r = m \cdot a$

Y) $N - mg = 0 \Rightarrow N = mg = 2 \cdot 9{,}8 = 19{,}6$ N

La fuerza de rozamiento máxima vale: $F_{rmax} = \mu \cdot m \cdot g$

En cada caso supondremos que la fuerza de rozamiento toma el valor máximo en el sentido opuesto al posible movimiento (a favor de la fuerza F).

a) $F - \mu \cdot m \cdot g = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad 1 - 0{,}1 \cdot 2 \cdot 9{,}8 = 2a$

$a = -0{,}49$ m/s^2

No es posible que el deslizamiento vaya a favor de la fuerza de rozamiento. Ello significa que la fuerza de rozamiento que actúa no es la máxima (como hemos supuesto), sino solamente la necesaria para que el bloque no se mueva, esto es:

$F - R = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - R = 0 \quad \Rightarrow \quad R = 1N$

valor comprendido entre cero y el máximo (1,96 N).

b) $F - \mu \cdot m \cdot g = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad 1{,}96 - 0{,}1 \cdot 2 \cdot 9{,}8 = 2a$

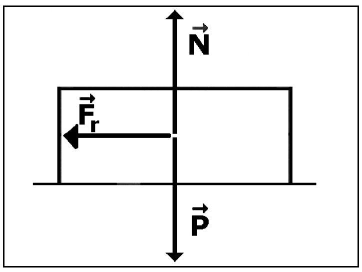
$a = 0$

El cuerpo no se mueve y la fuerza de rozamiento toma el valor máximo, igual al de la fuerza exterior F.

c) $F - \mu \cdot m \cdot g = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad 2{,}4 - 0{,}1 \cdot 2 \cdot 9{,}8 = 2a$

$a = 0{,}22\ m/s^2$

El cuerpo acelera en el sentido de la fuerza F. La fuerza de rozamiento, puesto que hay deslizamiento toma el valor máximo contrario al sentido de movimiento.



2) Bloque de 2 kg que desliza con velocidad inicial de 10 m/s sobre una superficie horizontal con $\mu = 0{,}1$ sin que ninguna fuerza horizontal ayude al movimiento. Determínese su aceleración y el tiempo que tarda en detenerse.

En este caso la fuerza de rozamiento toma su valor máximo en sentido opuesto al movimiento hasta que el bloque se detenga. Si tomamos el eje X en sentido positivo a favor del movimiento tendremos:

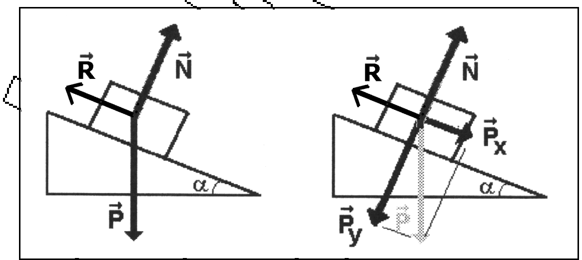
X) $-F_r = m \cdot a \qquad$ Y) $N - m \cdot g = 0 \Rightarrow N = m \cdot g$

Sustituyendo en la ecuación del eje X:

$-\mu \cdot m \cdot g = m \cdot a \Rightarrow \quad a = -\mu\, g = -0{,}1 \cdot 9{,}8 = -0{,}98\ m/s^2$

Tarda en detenerse: $v = v_0 + a \cdot t \qquad 0 = 10 + (-0{,}98) \cdot t \qquad t = 10{,}2\ s$

3) Cuerpo inicialmente en reposo sobre un plano inclinado 37°. Calcúlese la aceleración si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano es: a) 0,1; b) 0,8.



Supongamos que la fuerza de rozamiento es la máxima ($\mu \cdot N$):

Y) $N - P_y = 0 \qquad N - m \cdot g \cdot \cos\alpha = 0$

X) $P_x - R = m \cdot a \qquad m \cdot g \cdot \text{sen}\alpha - \mu\, N = ma$

Sustituyendo en la ecuación del eje X: $m \cdot g \cdot \text{sen}\alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha = ma$

Simplificando m se obtiene:

$$a = g(\text{sen}\alpha - \mu \cos\alpha)$$

Puede observarse que la aceleración es independiente de la masa del cuerpo. Apliquemos este resultado a los casos planteados en el enunciado:

a) $\mu = 0{,}1$; $a = 9{,}8 \cdot (\text{sen}37° - 0{,}1 \cdot \cos 37°) = 9{,}8 \cdot (0{,}6 - 0{,}1 \cdot 0{,}8) = 5{,}1\ m/s^2$

b) $\mu = 0{,}8$; $a = 9{,}8 \cdot (\text{sen}37° - 0{,}8 \cdot \cos 37°) = 9{,}8 \cdot (0{,}6 - 0{,}8 \cdot 0{,}8) = -0{,}39 m/s^2$

La aceleración no puede ser negativa, pues no puede comenzar a moverse el bloque a favor de la fuerza de rozamiento; en consecuencia, el bloque no se moverá y la fuerza de rozamiento será la necesaria para que el bloque quede en reposo:

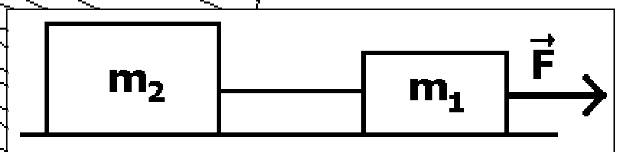
$P_x - R = 0$ $\qquad$ $mg\cdot sen\alpha - R = 0$ $\qquad$ $R = m\cdot g\cdot sen\alpha$

CUERPOS ENLAZADOS MEDIANTE CABLES. TENSION

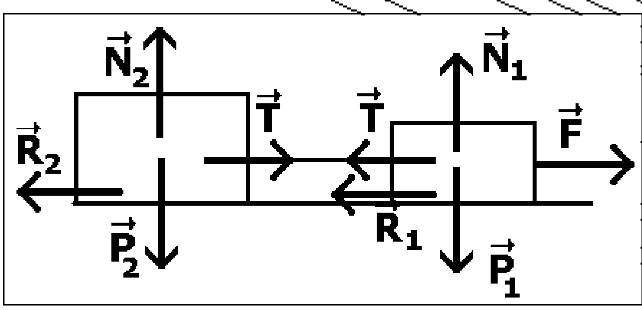
Con frecuencia en dinámica aparecen cuerpos enlazados entre sí mediante cables o cuerdas, que tienen la misión de transmitir una fuerza de un cuerpo a otro. Se trata de fuerzas de acción y reacción. Cuando una locomotora lleva enganchado un vagón el cable que une ambas unidades tira del vagón mediante una fuerza $\vec{F}$ mientras realiza una fuerza $-\vec{F}$ sobre la locomotora (3ª ley de Newton). Esta fuerza que transmiten los cables se denomina tensión. En los problemas que realicemos no tendremos en cuenta la masa de la cuerda y la tensión en todos los puntos de la misma se considera igual.

Ejemplos:

1) Dos cuerpos de masas m_1 y m_2 apoyados sobre una superficie horizontal sobre la que deslizan con coeficiente de rozamiento μ y enlazados mediante un cable. Sobre el primer cuerpo actúa una fuerza $\vec{F}$ (como indica la figura) suficiente para vencer el rozamiento y provocar una aceleración al sistema. Se pide determinar la aceleración del sistema y la tensión del cable.



El diagrama de fuerzas del sistema es el siguiente:



Puesto que el enunciado indica que el sistema se mueve en el sentido de la fuerza F aplicada, el rozamiento es el máximo en sentido contrario a la misma:

Cuerpo 1:

Eje X) $F - R_1 - T = m_1 \cdot a$

$F - \mu \cdot N_1 - T = m_1 \cdot a$

Eje Y) $N_1 - m_1 g = 0$ $N_1 = m_1 g$

De modo que la ecuación del eje X queda: $F - \mu \cdot m_1 g - T = m_1 \cdot a$ (1)

Cuerpo 2: Eje X) $T - R_2 = m_2 \cdot a$ $T - \mu \cdot N_2 = m_2 \cdot a$

EjeY) $N_2 - m_2 g = 0$ $N_2 = m_2 \cdot g$

La ecuación del eje X queda:

$T - \mu \cdot m_2 \cdot g = m_2 \cdot a$ (2)

Sumando las ecuaciones (1) y (2) obtendremos la aceleración y la tensión del cable:

$$F - \mu \cdot m_1 g - T = m_1 \cdot a$$

$$T - \mu \cdot m_2 \cdot g = m_2 \cdot a$$

$$F - \mu \cdot m_1 g - \mu \cdot m_2 \cdot g = m_1 \cdot a + m_2 \cdot a$$

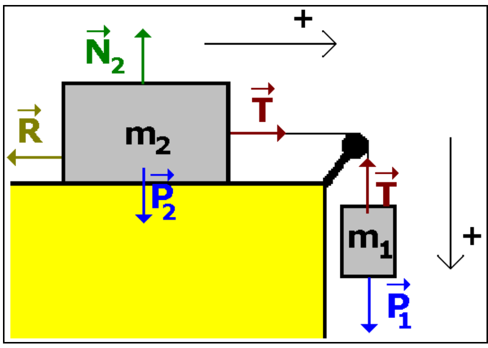
Despejando a:

$$a = \frac{F - \mu \cdot g \cdot (m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)}$$

Sustituyendo en la ecuación 2, una vez conocido el valor de a podemos calcular T.

En ocasiones en los problemas aparecen poleas en torno a las cuales van enrolladas cuerdas. En el presente curso supondremos que las poleas tienen una masa despreciable y no rozan en el eje en torno al cual pueden girar. Simplemente harán de transmisoras de la tensión de las cuerdas enrolladas, siendo la tensión de éstas, al carecer la polea de masa y rozamiento, la misma a ambos lados de la polea.

Ejemplo: Sea el sistema de la figura constituido por dos bloques de masas m_1=2 kg y m_2=3 kg unidos mediante una cuerda de masa despreciable que pasa por la garganta de una polea de masa también despreciable. Se pide calcular la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda cuando el coeficiente de rozamiento entre la masa apoyada y el plano horizontal es: a) 0; b) 0,2; c) 2



El movimiento, si tiene lugar, se producirá para la masa 1 verticalmente hacia abajo y para la masa 2 horizontalmente hacia la derecha. Tomaremos para cada masa un eje paralelo y otro perpendicular (⊥) al movimiento, positivo el eje paralelo en el sentido del movimiento. De este modo tenemos:

Cuerpo 1: ⊥: No hay fuerzas

=: $m_1 g - T = m_{1\sim} a$

Cuerpo 2: ⊥*:* $N_2 - m_{2\sim} g = 0$ ⇨ $N_2 = m_2 g$

=: $T - R = m_2 a$

Suponiendo que la fuerza de rozamiento toma su valor máximo y sumando las ecuaciones del eje paralelo al movimiento:

$m_1 \cdot g - T = m_1 \cdot a$

$T - \mu \cdot m_2 \cdot g = m_2 \cdot a$

$m_1 \cdot g - \mu \cdot m_2 \cdot g = (m_1 + m_2) \cdot a$

de donde resulta:

$$a = g \cdot \frac{m_1 - \mu \cdot m_2}{m_1 + m_2}$$

Esta es la solución general del problema suponiendo que la fuerza de rozamiento toma el valor máximo para oponerse al movimiento. Analicemos los resultados de cada uno de los casos particulares propuestos:

a) $m_1 = 2$ kg; $m_2 = 3$ kg; $\mu = 0$ ⇨ $a = g \cdot \frac{m_1 - \mu \cdot m_2}{m_1 + m_2} = 9,8 \cdot \frac{2 - 0 \cdot 3}{2 + 3} = 3,92$ m/s^2

El resultado es válido puesto que movimiento y rozamiento van en sentidos opuestos.

b) $m_1 = 2$ kg; $m_2 = 3$ kg; $\mu = 0,2$ ⇨ $a = 9,8 \cdot \frac{2 - 0,2 \cdot 3}{2 + 3} = 2,74$ m/s^2

El resultado también es válido.

c) m_1=2 kg; m_2=3 kg; μ =2 ⇨ $a = 9,8 \cdot \frac{2 - 2 \cdot 3}{2 + 3} = -7,84$ m/s^2

En este caso el resultado para la aceleración no es válido ya que deslizamiento y rozamiento tendrían el mismo sentido. En consecuencia el sistema no se moverá y a=0.

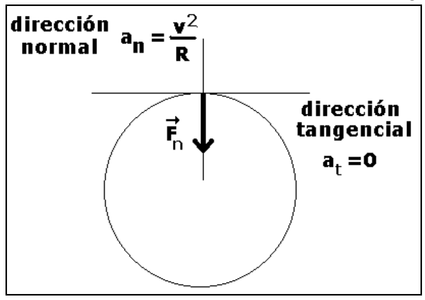
En los tres casos la tensión de la cuerda puede calcularse, por ejemplo, a partir de la ecuación del eje paralelo para el cuerpo 1: $T=m_1 \cdot (g+a)$

DINÁMICA DEL MOVIMIENTO CIRCULAR

Cuando un móvil realiza una trayectoria circular, en todo momento tiene una aceleración normal, dirigida hacia el centro de la circunferencia, que le hace cambiar la dirección del vector velocidad. Esta aceleración debe de estar producida por una fuerza que denominamos fuerza normal o fuerza centrípeta (por ir dirigida hacia el centro).

El origen de la fuerza centrípeta es diferente en cada caso: si se trata de una piedra que está dando vueltas atada a una cuerda en torno a un punto fijo, la fuerza centrípeta es realizada por la tensión de la cuerda; para la Luna que gira en tomo a la Tierra la fuerza centrípeta es ocasionada por la atracción gravitatoria Tierra-Luna; en el modelo atómico de Böhr, según el cual el electrón gira en torno al núcleo describiendo órbitas circulares, la fuerza centrípeta es consecuencia de la atracción eléctrica entre el núcleo con carga positiva y el electrón con carga negativa; para un tren eléctrico que gira en una vía circular, la vía realiza una fuerza dirigida hacia el centro que evita que el tren se salga de la vía y a la vez gire; un coche que toma una curva sufre una fuerza perpendicular a la trayectoria que le hace girar a consecuencia del rozamiento lateral entre los neumáticos y la carretera, etc.

En la mayoría de los problemas de dinámica de movimientos circulares no usaremos los ejes X e Y, sino en el punto concreto en el que resolvamos el problema utilizaremos los ejes tangente y normal a la trayectoria, puesto que sobre ellos van dirigidas las aceleraciones tangencial y normal, respectivamente.



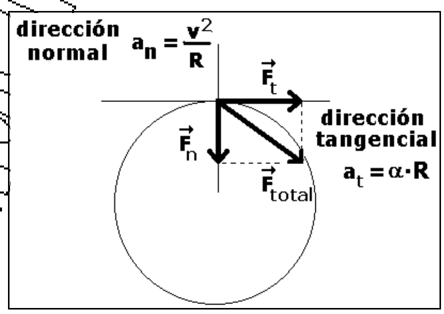
Supongamos un cuerpo que gira en una circunferencia horizontal de radio R con velocidad angular constante ω. Puede ser, por ejemplo, un tren eléctrico sobre una vía circular. ¿Qué fuerza provoca este movimiento? Según se indica en la figura, al ser la velocidad angular ω constante, la aceleración tangencial es nula. Sin embargo, para que se produzca el movimiento circular en cada punto debe haber una aceleración normal dirigida hacia el centro de la circunferencia de valor:

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

Así pues, en este caso, la fuerza total que da lugar al movimiento del cuerpo es:

$$F_n = m \cdot a_n = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

En el ejemplo del tren eléctrico esta fuerza la provoca la reacción normal de la vía en dirección lateral que evita que el tren salga de ella y siga con movimiento rectilíneo.

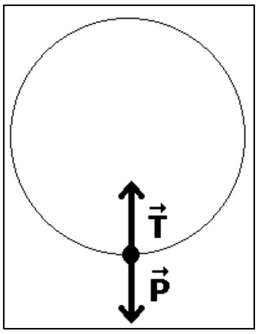


Cuando el cuerpo que gira en una circunferencia horizontal tiene una aceleración tangencial, debe existir, además de la fuerza normal o centrípeta, una fuerza en la dirección tangente a la trayectoria, según puede apreciarse en la figura. De este modo:

$$F_n = m \cdot \frac{v^2}{R} \qquad F_t = m \cdot \alpha \cdot R$$

La fuerza total que actúa es la resultante de ambas. Está representada en la figura y su módulo viene dado por:

$$F_{total} = \sqrt{F_t^{\,2} + F_n^{\,2}}$$



Un ejemplo muy ilustrativo de la dinámica del movimiento circular es el de un objeto (una bola o una piedra) de masa m atado al extremo de una cuerda de longitud L que gira en torno a un punto fijo en un plano vertical.

En el punto más bajo de su trayectoria el diagrama de fuerzas está representado en la figura. En el eje normal tenemos:

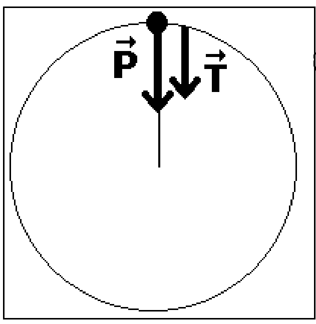
$$T - m\cdot g = m\cdot\frac{v^2}{R}$$

de modo que la tensión de la cuerda viene dada por

$$T = m\cdot(g + \frac{v^2}{R})$$

Para una piedra de 200 g que girase con un radio de 50 cm a una velocidad de 3 m/s la tensión sería:

$$T = 0,2\cdot(9,8 + \frac{3^2}{0,5}) = 5,56 \text{ N}$$



En el punto más alto de su trayectoria, tomando el eje normal a la trayectoria positivo hacia abajo:

$$T + m\cdot g = m\cdot\frac{v^2}{R}$$

Despejando la tensión:

$$T = m\cdot(\frac{v^2}{R} - g)$$

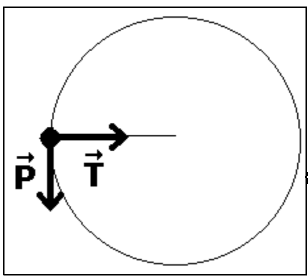
Sustituyendo los datos anteriores obtenemos:

$$T = 0,2\cdot(\frac{3^2}{0,5} - 9,8) = 1,64 \text{ N}$$

Puede apreciarse que la tensión en el punto más alto es menor que en el punto más bajo, consecuencia de que en el punto más alto el peso y la tensión "colaboran" en el mismo sentido, mientras que en el punto más bajo se oponen.

De la expresión para la tensión en el punto más alto puede deducirse que si la velocidad se va haciendo menor, la tensión también disminuye. Cuando $v^2/R=g$, la tensión se hace cero y para valores menores de la velocidad el valor de la tensión sería negativo, esto es debería ir hacia arriba para mantener el giro de la piedra, cosa imposible para una cuerda. En consecuencia podemos deducir que en este caso existe una velocidad mínima en el punto más alto para que el objeto pueda dar la vuelta completa. Es la velocidad correspondiente a T=0. Por tanto:

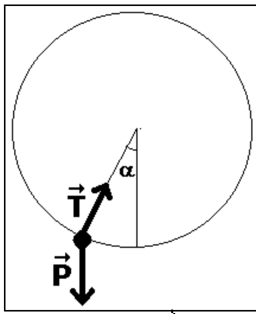
$$m\cdot g = m\cdot\frac{v_{min}^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v_{min} = \sqrt{g\cdot R}$$



Cuando el objeto se halla en la posición indicada en la figura de la izquierda, formando la cuerda ángulo de 90° con la vertical, la ecuación de la dinámica en los ejes tangencial y normal toma la forma:

Tangencial: $m\cdot g = m\cdot a_t$

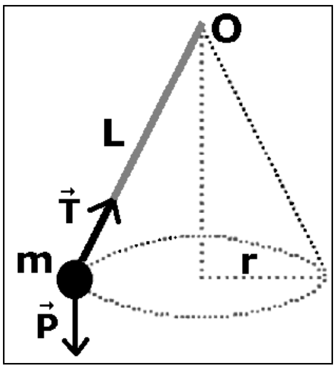
Normal: $T = m \cdot \frac{v^2}{R}$



En el punto en que la cuerda forma un ángulo α con la vertical, las ecuaciones resultan:

Dirección tangente: $m \cdot g \cdot \text{sen}\alpha = m \cdot a_t$

Dirección normal: $T - m \cdot g \cdot \cos\alpha = m \cdot \frac{v^2}{R}$



Otro ejemplo típico de movimiento circular es el del péndulo cónico representado en la figura de la izquierda. Un cuerpo de masa m gira en una circunferencia horizontal de radio r sujeto de un hilo de longitud L que pende de un punto O fijo situado en la vertical del centro de la circunferencia y por encima de él. El hilo forma en todo momento un ángulo θ con la vertical de modo que

$$\text{sen}\theta = \frac{r}{L}$$

Las ecuaciones en los ejes toman la forma:

Eje vertical: $T\cos\theta - m \cdot g = 0$

Eje horizontal: $T \cdot \text{sen}\theta = m \cdot \frac{v^2}{R}$